



**И.Е. Александрова, Т.Е. Александрова**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ,  
СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И  
СИНТЕЗ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ  
ОБЪЕКТОВ**

*Монография*



**Красноярск, 2016**



**И.Е. Александрова, Т.Е. Александрова**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ,  
СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ  
СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ**

Монография

Красноярск, 2016

УДК 517.93:519(075.8)  
ББК 32.817я73  
А46

**Александрова, И.Е.**

Математическое моделирование, системный анализ и синтез сложных технических объектов [Электронный ресурс]: монография / И.Е. Александрова, Т.Е. Александрова. – Электрон. текстовые дан. – Красноярск: Научно-инновационный центр, 2016. – 207 с.

ISBN 978-5-906314-54-3

DOI: [10.12731/asu.madi.ru/MMSA.2016.207](https://doi.org/10.12731/asu.madi.ru/MMSA.2016.207)

Рассмотрены принципы и методы математического моделирования возмущенного движения сложных технических объектов, имитационного моделирования случайных внешних возмущений, действующих на такие объекты, а также методы их системного анализа и параметрического синтеза.

Предназначена ученых и специалистов, работающих в области автоматизации управления сложными техническими системами и объектами, а также может быть использована в учебном процессе для магистров и аспирантов по направлениям «механика», «электромеханика» и «системный анализ и управление» высших технических учебных заведений.

**УДК 517.93:519(075.8)  
ББК 32.817я73**

ISBN 978-5-906314-54-3

© И.Е. Александрова, Т.Е. Александрова

## Содержание

Введение .....	5
<b>Глава 1. Математическое моделирование динамических систем .....</b>	<b>7</b>
1.1. Основные понятия и определения .....	7
1.2. Дискретные динамические системы .....	9
1.3. Континуальные динамические системы .....	13
1.4. Дискретно-континуальные динамические системы .....	16
1.5. Линеаризация математических моделей динамических систем .....	22
1.6. Декомпозиция математических моделей динамических систем .....	28
1.7. Идентификация математических моделей динамических систем .....	37
1.8. Имитационное моделирование внешних возмущений, действующих на танковую пушку .....	46
<b>Глава 2. Системный анализ динамических систем .....</b>	<b>54</b>
2.1. Передаточные функции и характеристические уравнения линейных динамических систем .....	54
2.2. Временные характеристики линейных динамических систем ...	59
2.3. Частотные характеристики линейных динамических систем ...	65
2.4. Устойчивость линейных динамических систем .....	70
2.5. Устойчивость нелинейных динамических систем по первому приближению. Критерии устойчивости .....	74
2.6. Построение границ областей устойчивости и линий равной степени устойчивости линейных динамических систем .....	81
2.7. Функции Ляпунова динамических систем и их основные свойства. Прямой метод Ляпунова оценки устойчивости динамических систем .....	86
<b>Глава 3. Параметрический синтез динамических систем .....</b>	<b>94</b>
3.1. Проблема параметрического синтеза и критерии оптимальности .....	94
3.2. Принцип максимума .....	98
3.3. Метод динамического программирования .....	103
3.4. Принцип минимакса .....	108

3.5. Выбор весовых коэффициентов аддитивного критерия оптимальности .....	112
3.6. Алгоритмический метод параметрического синтеза динамической системы .....	116
3.7. Параметрический синтез инвариантных динамических систем .....	127
3.8. Параметрический синтез робастных динамических систем .....	133
3.9. Параметрический синтез динамических систем с переменной структурой .....	138
<b>Глава 4. Анализ и синтез динамических систем с цифровыми вычислительными машинами .....</b>	<b>141</b>
4.1. Динамические системы с цифровыми вычислительными машинами .....	141
4.2. Дискретная передаточная функция дискретного динамического звена .....	146
4.3. Дискретная передаточная функция замкнутой динамической системы с ЦВМ .....	149
4.4. Устойчивость динамических систем с ЦВМ .....	151
4.5. Параметрический синтез дискретной системы наведения и стабилизации танковой пушки .....	153
4.6. Синтез цифровых нерекурсивных фильтров .....	156
4.7. Синтез цифровых рекурсивных фильтров .....	168
4.8. Синтез дифференцирующих фильтров .....	174
4.9. Синтез цифровых ПД-стабилизаторов .....	179
Список литературы .....	186
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ .....</b>	<b>191</b>
Приложение 1 .....	191
Приложение 2 .....	193
Приложение 3 .....	195
Приложение 4 .....	197
Приложение 5 .....	201
Приложение 6 .....	203
Приложение 7 .....	204

## ВВЕДЕНИЕ

Современные технические объекты представляют собой сложные динамические системы, которые характеризуются следующими свойствами:

- возмущенное движение сложных динамических систем описывается дифференциальными уравнениями высокого порядка;
- сложные динамические системы, как правило, являются дискретно-континуальными, математические модели возмущенного движения которых содержат как обыкновенные дифференциальные уравнения, так и дифференциальные уравнения в частных производных;
- сложные динамические системы обычно являются нелинейными системами, содержащими нелинейные динамические звенья с неаналитическими характеристиками, которые не могут быть линеаризованы классическими методами;
- внешние возмущения, действующие на сложные динамические системы, имеют, как правило, широкие амплитудные и частотные спектры;
- значения параметров сложных динамических систем часто являются нестабильными и изменяются во времени в зависимости от режимов работы технического объекта и от характеристик окружающей среды;
- сложные динамические системы, как правило, являются управляемыми, контуры управления которых содержат цифровые вычислительные машины, осуществляющие функции диагностики технического состояния и функции управления сложной динамической системой.

Перечисленные свойства и особенности сложных динамических систем определяют содержание настоящей книги, состоящей из четырех разделов.

Первый раздел посвящен математическому моделированию возмущенного движения сложных дискретно-континуальных динамических систем и имитационному моделированию случайных внешних возмущений, действующих на динамические системы. Уделено внимание таким важным проблемам математического моделирования как декомпозиция математических моделей, в смысле разделения «быстрых» и «медлен-

ных» движений, а также проблемам идентификации математических моделей, в смысле адекватности математической модели реальному техническому объекту. В качестве примеров сложных динамических систем рассматриваются системы и агрегаты колесных и гусеничных транспортных машин и их агрегатов.

Во втором разделе рассматриваются вопросы системного анализа сложных динамических систем, прежде всего, вопросы устойчивости таких систем.

Третий раздел посвящен проблемам параметрического синтеза сложных динамических систем.

Показано, что регулярные методы синтеза динамических систем, такие как принцип максимума, метод динамического программирования, принцип минимакса и другие, встречаются существенные затруднения в применении к сложным динамическим системам.

Авторами разработан алгоритмический метод синтеза, основанный на непосредственном вычислении математического ожидания функционала качества на решениях математической модели объекта при воздействии на объект случайных внешних возмущений. С помощью предложенного метода решены задачи параметрического синтеза оптимальных, инвариантных и робастных систем наведения и стабилизации основного вооружения танка.

В четвертом разделе рассматриваются вопросы структурно-параметрического синтеза цифровых систем автоматического управления и диагностики сложными динамическими системами. Основное внимание уделено использованию цифровых низкочастотных фильтров и построению на базе этих фильтров цифровых систем управления и диагностики повышенной помехозащищенности.

Основу настоящей монографии составляют лекции по курсам «Математическое моделирование», «Основы системного анализа» и «Синтез систем автоматики», читаемыми авторами студентам, дополненные собственными научными результатами авторов, опубликованными ранее в различных периодических научных изданиях.

## Глава 1.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 1.1. Основные понятия и определения

Под динамической системой будем понимать объект любой физической природы или физический процесс, поведение которого описывается системой дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных), называемых математической моделью объекта или процесса. Состояние объекта или процесса в момент времени  $t$  может быть представлено в виде элемента  $X(t)$  множества возможных состояний  $G_x$ , которое можно рассматривать как пространство состояний динамической системы. Пространством состояний в функциональном анализе называется метрическое пространство, каждый элемент которого полностью определяет состояние рассматриваемой системы. В свою очередь метрическим пространством называется множество, в котором задано расстояние между двумя его элементами  $X_1 \in G_x$ ,  $X_2 \in G_x$  в виде действительной функции  $\rho(X_1, X_2)$ , удовлетворяющей трем аксиомам [1]:

$$\rho(X_1, X_2) = 0, \text{ когда } X_1 = X_2;$$

$$-\rho(X_1, X_2) = \rho(X_2, X_1) \text{ — аксиома симметрии;}$$

$$\rho(X_1, X_3) \leq \rho(X_1, X_2) + \rho(X_2, X_3) \text{ — аксиома треугольника.}$$

Для большинства задач теории динамических систем понятие пространства состояний как метрического пространства является чрезмерно широким и удобнее пользоваться частными видами этого понятия. Для решения задач устойчивости и оптимизации обычно достаточно самой простой метрики — эвклидовой, и использования эвклидова пространства состояний. Элементами эвклидова пространства состояний  $R^n$  служат  $n$ -мерные векторы

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T,$$

где индекс  $T$  означает транспонирование, а расстояние  $\rho[X_1(t), X_2(t)]$  определяется как эвклидова норма разности векторов  $X_1(t) \in R^n$  и  $X_2(t) \in R^n$

$$\begin{aligned} \rho[X_1(t), X_2(t)] &= \{[X_{11}(t) - X_{21}(t)]^2 + [X_{12}(t) - X_{22}(t)]^2 + \dots + \\ &+ [X_{1n}(t) - X_{2n}(t)]^2\}^{1/2} = \\ &= \langle [X_1(t) - X_2(t)], [X_1(t) - X_2(t)] \rangle^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В системе (1.1) через  $\langle X, Y \rangle$  обозначено скалярное произведение двух векторов  $X \in R^n$  и  $Y \in R^n$ .

Расстояние (1.1) удовлетворяет приведенным выше аксиомам. При  $n = 3$  евклидово пространство аналогично реальному трехмерному пространству.

Векторное дифференциальное уравнение, списывающее возмущенное движение динамической системы относительно невозмущенного, в общем случае имеет вид

$$\dot{X}(t) = \Phi[X(t), \alpha] + F(t); \quad X(t) \in R^n; \alpha \in R^s, \quad (1.2)$$

где  $X(t) \in R^n$  –  $n$ -мерный вектор состояния системы;  $\alpha \in R^s$  –  $s$ -мерный вектор варьируемых параметров системы.

Что касается вектор-функции  $\Phi$  векторных аргументов  $X(t)$  и  $\alpha$ , то она считается заданной и принадлежащей некоторому классу функций, допускающую существование решения уравнения (1.2) при начальном условии  $X(0) \in R^n$  и  $\alpha \in R^s$ . При составлении уравнения (1.2) обычно полагают, что в невозмущенном состоянии  $X(t) = 0$ . Через  $F(t)$  в уравнении (1.2) обозначен вектор внешних возмущений. Если известна зависимость вектор-функции  $F(t)$  от времени, то такая динамическая система называется детерминированной. Если же вектор-функция  $F(t)$  является случайной функцией времени, то динамическая система (1.2) называется стохастической.

Наряду с понятием динамической системы будем использовать понятие процесса. Если динамическая описывается уравнением (1.2), то процесс в этой системе описывается решением уравнения (1.2) ( $X(t, \alpha)$ ) при определенном начальном условии  $X(0)$  и определенном векторе варьируемых параметров  $\alpha$ . Конец вектора  $X(t, \alpha)$ , называемый изобража-

ющей точкой системы, при изменении времени  $t$  описывает в пространстве  $R^n$  фазовую траекторию. Характер протекания процесса определяет качество работы динамической системы.

Компоненты вектора варьируемых параметров динамической системы  $\alpha$  представляют собой конструктивные параметры – геометрические, массовые, инерционные, электрические, гидравлические и т. п. Ограничения на значения этих параметров выразим в виде неравенств

$$\Psi_k(\alpha) \leq 0 \quad (k = \overline{1, m}). \quad (1.3)$$

Неравенства (1.3) определяют область допустимых значений  $G_\alpha$  вектора  $\alpha$  в пространстве  $R^s$ .

## 1.2. Дискретные динамические системы

Под дискретными динамическими системами будем понимать системы любой физической природы, возмущенное движение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Современные технические объекты обычно представляют собой совокупность механических, гидравлических и электрических агрегатов. Кроме того, большинство технических объектов являются управляемыми или стабилизируемыми, содержащими автоматический регулятор, обычно выполненный на электронных и микропроцессорных элементах. Примером такого сложного технического объекта может служить система наведения и стабилизации танковой пушки, структурная схема которой в канале вертикального наведения приведена на рис. 1.1.

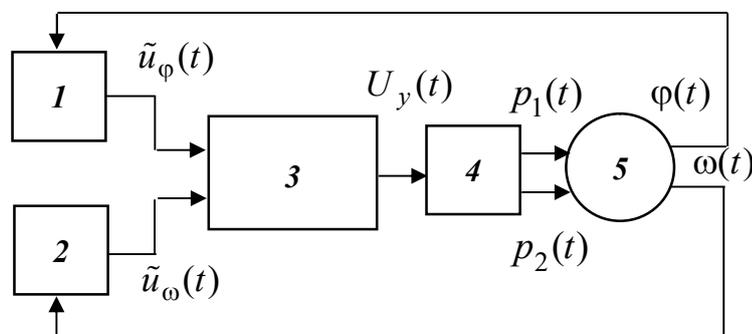


Рис. 1.1. Структурная схема системы наведения и стабилизации танковой пушки

На рис. 1.1 приняты следующие обозначения: 1 – гироскопический датчик угла; 2 – гироскопический датчик угловой скорости; 3 – электронный блок управления; 4 – электрогидравлический усилитель; 5 – танковая пушка;  $\tilde{u}_\varphi(t)$  – электрический сигнал переменного тока на выходе вращающегося трансформатора гироскопического датчика угла;  $\tilde{u}_\omega(t)$  – электрический сигнал переменного тока на выходе вращающегося трансформатора гироскопического датчика угловой скорости;  $u_y(t)$  – выходной сигнал электрического блока управления;  $\Delta p(t)$  – перепад давлений рабочей жидкости в полостях исполнительного гидроцилиндра электрогидравлического усилителя;  $\varphi(t)$  – угловое рассогласование между осью канала ствола танковой пушки и линией прицеливания;  $\omega(t)$  – угловая скорость поворота танковой пушки относительно оси цапф.

Выходные сигналы гироскопических датчиков 1 и 2 представляют собой высокочастотные электрические сигналы переменного тока частотой 400–500 Гц, амплитуда которых пропорциональна углу  $\varphi(t)$  и угловой скорости  $\omega(t)$  соответственно. В электронном блоке 3 эти сигналы выпрямляются и преобразуются в электрические сигналы постоянного тока  $\bar{U}_\varphi(t)$  и  $\bar{U}_\omega(t)$ .

Гироскопический датчик угла 1 представляет собой гироскопическую платформу с релейной системой разгрузки и «сухим» трением в осях карданова подвеса [2]. В работе [3] показано, что приближенно возмущенное движение гироскопической платформы может быть описано линейным дифференциальным уравнением третьего порядка в операторной форме

$$(T_{r1}^3 p^3 + T_{r2}^2 p^2 + T_{r3} p + 1) \bar{U}_\varphi(t) = k_r \varphi(t), \quad (1.4)$$

где  $T_{r1}$ ,  $T_{r2}$  и  $T_{r3}$  – постоянные времени гироскопической платформы;  $k_r$  – коэффициент усиления гироскопической платформы.

Гироскопический датчик угловой скорости 2 имеет более простое устройство и представляет собой двухстепенной гироскоп, на оси рамки которого укреплен ротор вращающегося трансформатора. Дифференциальное уравнение возмущенного движения датчика 2 в операторной форме имеет вид [4]:

$$(T_{1c}^2 p^2 + T_{2c} p + 1) \bar{U}_\omega(t) = k_c \omega(t), \quad (1.5)$$

где  $T_{1c}$  и  $T_{2c}$  – постоянные времени датчика 2;  $k_c$  – коэффициент усиления датчика 2.

Помимо выпрямления сигналов переменного тока  $\tilde{U}_\varphi(t)$  и  $\tilde{U}_\omega(t)$  электронный блок управления 3 формирует алгоритмы стабилизации в виде

$$\sigma_\varphi(t) = k_\varphi \bar{U}_\varphi(t) + k_\omega \bar{U}_\omega(t), \quad (1.6)$$

где  $k_\varphi$  и  $k_\omega$  – варьируемые параметры электронного блока.

Электрогидравлический усилитель 4 содержит электромагнит управления и гидравлическую часть, состоящую из гидронасоса и исполнительного гидроцилиндра, шток которого шарнирно связан с казенной частью танковой пушки 5. Расчетная схема электрогидравлического усилителя приведена на рис. 1.2.

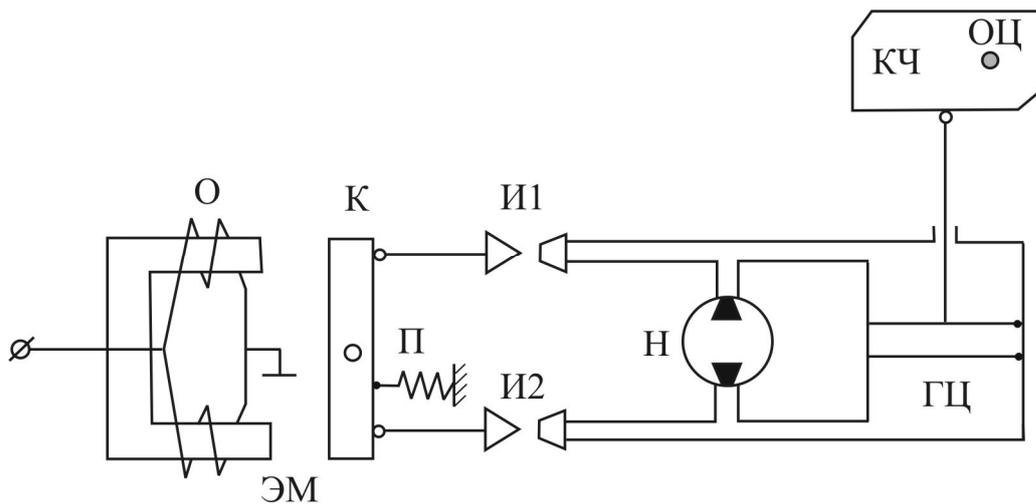


Рис. 1.2. Расчетная схема электрогидравлического усилителя

На рис. 1.2 приняты следующие обозначения: ЭМ – электромагнит; О – обмотка электромагнита; К – коромысло электромагнита; П – фиксирующая пружина; И1, И2 – запорные иглы; Н – насос; ГЦ – исполнительный гидроцилиндр; КЧ – казенная часть пушки; ОЦ – ось цапф.

Величина тока  $i_y(t)$  в обмотке О определяется законом Ома в дифференциальной форме

$$(L_0 p + r_0) i_y(t) = U_y(t), \quad (1.7)$$

где  $U_y(t)$  – выходной сигнал электрического блока;  $L_0$  – индуктивность обмотки О;  $r_0$  – активное сопротивление обмотки О.

Уравнение возмущенного движения коромысла К под действием магнитного поля, индуцируемого обмоткой О при протекании электрического тока  $i_y(t)$ , имеет следующий вид

$$(I_K p^2 + f p + c)\beta(t) = k_e i_y(t), \quad (1.8)$$

где  $\beta(t)$  – угловое отклонение коромысла К от нейтрального положения, устанавливаемого фиксирующей пружиной при отсутствии тока в обмотке О;  $I_K$  – момент инерции коромысла относительно оси вращения;  $f$  – коэффициент жидкостного трения в оси коромысла;  $c$  – коэффициент жесткости фиксирующей пружины П;  $k_e$  – коэффициент усиления электромагнита.

Перепад давлений рабочей жидкости в полостях исполнительного гидроцилиндра

$$\Delta p(t) = p_1(t) - p_2(t),$$

где  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  – давление рабочей жидкости в верхней и нижней полостях гидроцилиндра соответственно, зависит от угла  $\beta(t)$  и определяется дифференциальным уравнением

$$(T_\Gamma p + 1)\Delta p(t) = -k_d \beta(t), \quad (1.9)$$

где  $T_\Gamma$  – постоянная времени гидросистемы;  $k_d$  – коэффициент пропорциональности.

Знак минус в правой части уравнения (1.9) свидетельствует о том, что положительному углу  $\beta$  (против часовой стрелки) соответствует отрицательный перепад давлений рабочей жидкости в полостях исполнительного гидроцилиндра.

Дифференциальное уравнение возмущенного движения танковой пушки как объекта стабилизации записывается в виде

$$I_\Pi p^2 \varphi(t) = k_M \Delta p(t) + M_B(t), \quad (1.10)$$

где  $I_\Pi$  – момент инерции пушки относительно оси цапф;  $k_M$  – коэффициент пропорциональности;  $M_B(t)$  – момент внешних возмущений, действующих на танковую пушку.

Выходной сигнал электронного блока стабилизации  $U_y(t)$  связан с управляющей функцией  $\sigma_y(t)$ , формируемой электронным блоком в виде соотношения (1.6), следующим нелинейным соотношением

$$U_y(t) = \begin{cases} \sigma_\varphi(t) & \text{при } U^* \leq |\sigma_\varphi(t)| \leq U^{**}; \\ U^* \operatorname{sign} \sigma_\varphi(t) & \text{при } |\sigma_\varphi(t)| < U^*; \\ U^{**} \operatorname{sign} \sigma_\varphi(t) & \text{при } |\sigma_\varphi(t)| > U^{**}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Таким образом, система уравнений (1.4)–(1.11) представляет собой математическую модель возмущенного движения замкнутой дискретной системы наведения и стабилизации танковой пушки.

### 1.3. Континуальные динамические системы

Континуальной динамической системой назовем систему любой физической природы, возмущенное движение которой описывается дифференциальными уравнениями в частных производных:

- уравнение крутильных колебаний вала

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2};$$

- уравнение поперечных колебаний прямого стержня

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = -a^2 \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x^4};$$

- уравнение колебаний мембраны

$$\frac{\partial^2 U(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} = a^2 \left[ \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} \right];$$

- уравнение распространения звука в однородной среде

$$\frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t^2} = a^2 \left[ \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3^2} \right].$$

Обычно континуальные динамические системы не являются автономными техническими объектами, а входят как составные части в более сложные объекты. Так, упругий ствол танковой пушки является континуальной динамической системой, которая является отдельным агрегатом замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки.

Рассмотрим математическую модель возмущенного движения упругого ствола танковой пушки, схема которой представлена на рис. 13.

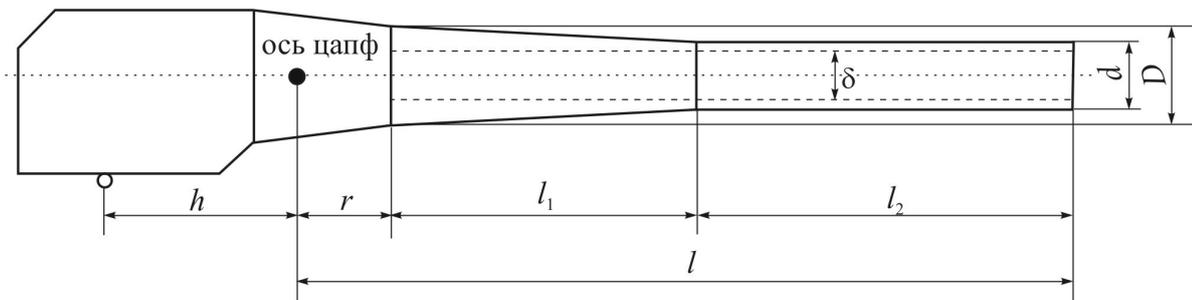


Рис. 1.3. Геометрические характеристики танковой пушки

Анализ рис. 1.3 приводит к выводу, что упругая часть ствола состоит из конической и цилиндрической частей и представляет собой круглый полый стержень переменного сечения с закрепленным и свободным концами. Кинетическая и потенциальная энергии такого стержня определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_r^l m(x) V^2(x, t) dx; \\ \Pi &= \frac{1}{2} \int_r^l EI(x) \left[ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $E$  – модуль упругости материала ствола;  $m(x)$  – текущая погонная масса ствола;  $I(x)$  – геометрический момент инерции сечения ствола, перпендикулярного оси канала ствола;  $y(x,t)$  – отклонение произвольной точки деформированной оси канала ствола от положения этой оси в недеформированном состоянии;  $V(x,t)$  – текущая мгновенная скорость перемещения произвольной точки оси канала ствола, определяемая формулой

$$V(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}. \quad (1.13)$$

В соответствии с принципом Остроградского–Гамильтона [5] рассмотрим кинетический потенциал рассматриваемой континуальной системы, который равен разности кинетической и потенциальной энергий

$$L = K - \Pi = \frac{1}{2} \int_r^l \left\{ m(x) \left[ \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right]^2 - EI(x) \left[ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 \right\} dx. \quad (1.14)$$

Введем в рассмотрение величину  $S$ , называемую действием по Гамильтону на отрезке времени  $(0, T)$  и определяемую формулой

$$S = \int_0^T L dt = \frac{1}{2} \int_0^T \int_r^l \left\{ m(x) \left[ \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right]^2 - EI(x) \left[ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 \right\} dx dt. \quad (1.15)$$

Краевые условия для рассматриваемой задачи запишем в виде

$$y(x,t) \Big|_{x=r} = 0; \quad \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=r} = 0; \quad (1.16)$$

$$EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0. \quad (1.17)$$

Краевые условия (1.16) являются условиями жесткого соединения упругой части ствола с казенной частью пушки, а краевые условия (1.17) означают отсутствие изгибающих моментов и перерезывающих сил на дульном срезе ствола.

С учетом краевых условий (1.16) и (1.17) уравнение Эйлера–Лагранжа, доставляющее минимум функционалу (1.15), записывается

$$m(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0. \quad (1.18)$$

Если в рассматриваемой континуальной динамической системе имеется диссипация (рассеивание) энергии, то уравнение Эйлера–Лагранжа (1.18) принимает вид [8, 9]:

$$m(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \zeta \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI(x)\frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = 0,$$

где  $\zeta$  – коэффициент внутреннего трения материала ствола.

#### 1.4. Дискретно-континуальные динамические системы

Дискретно-континуальной динамической системой назовем систему любой физической природы, возмущенное движение которой описывается системой дифференциальных уравнений, содержащей как обыкновенные дифференциальные уравнения, так и уравнения в частных производных.

Примером дискретно-континуальной системы может служить танковая пушка, представляющая собой жесткое соединение казенной части и упругой части ствола. При этом кинетическая энергия танковой пушки определяется соотношением

$$K = \frac{1}{2} \left\{ I_{\Pi} \left[ \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} \right]^2 + \int_r^l m(x) V^2(x,t) dx \right\}, \quad (1.19)$$

а текущая скорость движения производной точки ствола  $V(x,t)$  равна

$$V(x,t) = (r+x)\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} + \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}, \quad (1.20)$$

где  $\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}$  – угловая скорость поворота танковой пушки относительно оси цапф;  $I_{\Pi}$  – момент инерции танковой пушки относительно оси цапф.

Тогда уравнения Эйлера–Лагранжа, доставляющие минимум функционалу (1.15), принимают при краевых условиях (1.16) и (1.17) следующий вид [10]:

$$I_{\Pi} \frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2} - \int_r^l m_1(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} dx = 0; \quad (1.21)$$

$$m_1(x) \frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2} + m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \zeta \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI(x) \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = 0. \quad (1.22)$$

Уравнения (1.21) и (1.22) описывают свободные колебания танковой пушки с упругим стволом. Вместе с тем, на танковую пушку действуют внешние возмущения, возникающие вследствие колебаний подрессоренной части корпуса танка при его движении по неровностям поверхности движения. Обозначим координату продольно-угловых колебаний корпуса через  $\varphi_k(t)$ , поперечно-угловых колебаний – через  $\vartheta_k(t)$  и вертикальных колебаний – через  $z_k(t)$ . Рассмотрим рис. 1.4, на котором обозначены следующие системы координат:  $O_k x_k y_k$  – система координат, связанная с подрессоренной частью корпуса танка, причем ось  $O_k x_k$  является собственной продольной осью танка, а ось  $O_k y_k$  – собственной поперечной осью;  $O_b x_b y_b$  – система координат, связанная с башней танка, причем точка  $O_b$  расположена на оси поворота башни, ось  $O_b x_b$  параллельна собственной продольной осью башни, а ось  $O_b y_b$  параллельна собственной поперечной оси башни;  $O_{\Pi} x_{\Pi} y_{\Pi}$  – система координат, связанная с танковой пушкой, причем точка  $O_{\Pi}$  расположена на оси цапф пушки, ось  $O_{\Pi} x_{\Pi}$  совпадает с осью канала ствола, а ось  $O_{\Pi} y_{\Pi}$  дополняет систему до правой. Предполагается, что текущий угол поворота башни относительно корпуса составляет  $\alpha(t)$ , текущая угловая скорость продольно-угловых колебаний составляет  $\dot{\varphi}_k(t)$ , а текущая угловая скорость поперечно-угловых колебаний корпуса –  $\dot{\vartheta}_k(t)$ . Тогда из рассмотрения

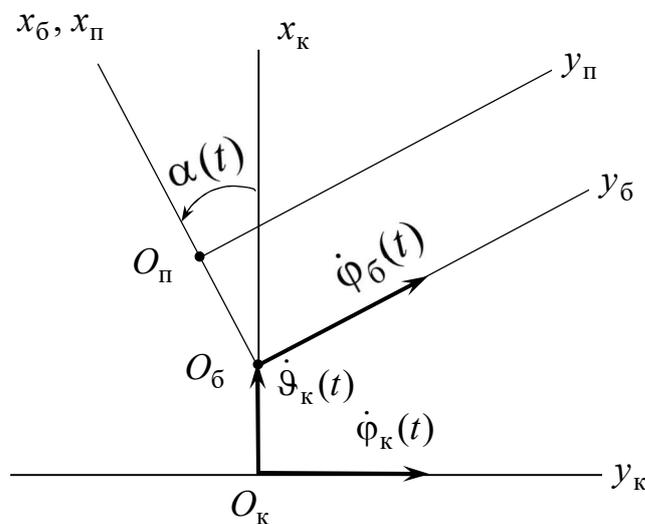
рис. 1.4 можно записать соотношение для угловой скорости продольно-угловых колебаний танковой башни

$$\dot{\phi}_{\delta}(t) = \dot{\phi}_{\kappa}(t) \cos \alpha(t) + \dot{\vartheta}_{\kappa}(t) \sin \alpha(t). \quad (1.23)$$

Вследствие трения в оси цапф танковой пушки на последнюю действует возмущающий момент, равный моменту трения, и определяется соотношением

$$M_{\text{в}}(t) = m_{\text{с}} \operatorname{sign}[\dot{\phi}_{\delta}(t) - \dot{\phi}(t)] + \mu[\dot{\phi}_{\delta}(t) - \dot{\phi}(t)]. \quad (1.24)$$

где  $m_{\text{с}}$  – момент сухого трения в оси цапф;  $\mu$  – коэффициент жидкостно-



го трения в оси цапф.

Рис. 1.4. Системы координат, связанные с корпусом, башней и пушкой

Кроме того, на ствол танковой пушки в канале вертикального наведения действует распределенная сила  $F(x, t)$ , обусловленная вертикальными колебаниями подрессоренной части корпуса танка и определяемая функцией

$$F(x, t) = m(x)[\ddot{z}_{\kappa}(t) - g], \quad (1.25)$$

где  $\ddot{z}_{\kappa}$  – текущее ускорение подрессоренной части корпуса танка относительно его вертикальной оси;  $g$  – ускорение силы тяжести.

В результате математическая модель возмущенного движения танковой пушки как объекта стабилизации принимает следующий вид:

$$I_{\Pi} \frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2} - \int_r^l m_1(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} dx = K_M \Delta p(t) + M_B(t); \quad (1.26)$$

$$m_1(x) \frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2} + m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \zeta \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = F(x,t). \quad (1.27)$$

При решении задач анализа и синтеза дискретно-континуальных динамических систем обычно математическую модель такой системы приводят к эквивалентной математической модели дискретной системы, записываемой в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. В соответствии с работами [11, 12] функцию  $y(x,t)$  представим в виде

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x) T_i(t), \quad (1.28)$$

где  $n$  – число учитываемых тонов упругих колебаний ствола. Подставим (1.28) в уравнения (1.26) и (1.27). В результате получаем

$$I_{\Pi} \ddot{\varphi}(t) - \sum_{i=1}^n \ddot{T}_i(t) \int_r^l m_1(x) \gamma_i(x) dx = k_M \Delta p(t) + M_B(t); \quad (1.29)$$

$$m_1(x) \ddot{\varphi}(t) + m(x) \sum_{i=1}^n \gamma_i(x) \ddot{T}_i(t) + E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ I(x) \sum_{i=1}^n \gamma_i''(x) T_i(t) \right] + \zeta E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ I(x) \sum_{i=1}^n \gamma_i''(x) \dot{T}_i(t) \right] = F(x,t). \quad (1.30)$$

Обе части уравнения (1.30) умножим на  $\gamma_j(x)$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) и проинтегрируем в пределах от  $r$  до  $l$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\phi}(t) \int_r^l m_1(x) \gamma_j(x) dx + \sum_{i=1}^n \ddot{T}_i(t) + \int_r^l m(x) \gamma_j(x) dx + \\
& + E \sum_{i=1}^n T_i(t) \int_r^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} [I(x) \gamma_i''(x) \gamma_j(x)] dx + \quad (1.31) \\
& + \zeta E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{i=1}^n \dot{T}_i(t) \int_r^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} [I(x) \gamma_i''(x) \gamma_j(x)] dx = \int_r^l F(x, t) \gamma_j(x) dx.
\end{aligned}$$

Запишем условия ортогональности собственных форм упругих колебаний ствола [13]

$$\begin{aligned}
& \int_r^l m_1 \gamma_j(x) dx = a_j; \quad (j = \overline{1, n}); \\
& E \int_r^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} [I(x) \gamma_i''(x) \gamma_j(x)] dx = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j; \\ b_j & \text{при } i = j, \end{cases} \quad (1.32) \\
& \int_r^l m(x) \gamma_i(x) \gamma_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j; \\ c_j & \text{при } i = j, \end{cases} \\
& \int_r^l F(x, t) \gamma_j(x) dx = f_j(t).
\end{aligned}$$

Тогда уравнения (1.29) и (1.31) записываются в виде

$$I_{\Pi} \ddot{\phi}(t) - \sum_{i=1}^n a_i \ddot{T}_i(t) = k_M \Delta p(t) + M_B(t); \quad (1.33)$$

$$a_i \ddot{\phi}(t) + c_i \ddot{T}_i(t) + \zeta b_i \dot{T}_i(t) + b_i T_i(t) = f_i(t); \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.34)$$

При вычислении численных значений коэффициентов системы дифференциальных уравнений 2  $(n + 1)$  порядка и функций  $f_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  собственные формы колебаний упругого ствола танковой пушки выбирались в виде [12]

$$\gamma_i(x) = \sin \frac{i\pi}{2(l-r)} x. \quad (1.35)$$

В последнее соотношение (1.32) подставим формулу (1.35). В результате получаем

$$f_i(t) = k_i [\ddot{z}_k(t) - g]; \quad (i = \overline{1, n}), \quad (1.36)$$

где

$$k_i = \int_r^l m_1(x) \gamma_j(x) dx; \quad (i = \overline{1, n}). \quad (1.37)$$

Рассмотрим расчетную схему танковой пушки, представленную на рис. 1.3. Пускательные параметры ствола танковой пушки составляют:

$$\begin{aligned} \delta = 0,125 \text{ м}; \quad d = 0,172 \text{ м}; \quad D = 0,252 \text{ м}; \quad r = 0,25 \text{ м}; \\ l_1 = 2,18 \text{ м}; \quad l_2 = 2,40 \text{ м}; \quad l = 4,83 \text{ м}; \quad E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}. \end{aligned}$$

Тогда значения коэффициентов математической модели (1.33), (1.34) для первых трех тонов упругих колебаний танковой пушки приведены в табл. 1.1.

Т а б л и ц а 1 . 1

Коэффициенты математической модели возмущенного движения упругой танковой пушки

№ тона	$a_i, \text{ Н} \cdot \text{с}^2$	$b_i, \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}$	$c_i, \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^2$	$k_i, \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^2$
1	$9,721 \cdot 10^2$	$2,213 \cdot 10^5$	$2,152 \cdot 10^3$	$3,612 \cdot 10^2$
2	$7,999 \cdot 10^2$	$3,194 \cdot 10^6$	$1,941 \cdot 10^3$	$3,994 \cdot 10^2$
3	$6,34 \cdot 10^2$	$1,786 \cdot 10^7$	$2,144 \cdot 10^3$	$2,286 \cdot 10^2$

В уравнениях (1.34) через  $f_i(t)$  обозначены внешние возмущения, обусловленные вертикальными колебаниями подрессоренной части корпуса танка, а через  $a_i \ddot{\phi}(t)$  – параметрические возмущения, обусловленные стабилизируемым движением танковой пушки относительно оси цапф. Предположим, что параметрические возмущения отсутствуют. Такой режим имеет место при отключенном стабилизаторе и застопоренной пушке. Тогда упругие колебания ствола описываются дифференциальными уравнениями

$$c_i \ddot{T}_i(t) + \zeta b_i \dot{T}_i(t) + b_i T_i(t) = k_i [\ddot{z}_k(t) - g]; \quad (j = \overline{1, n}). \quad (1.38)$$

Положим, что  $T_i(t) = T_{i0} + \Delta T_i(t)$ , где  $T_{i0}$  – статическая составляющая, обусловленная статическим прогибом ствола;  $\Delta T_i(t)$  – динами-





$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_2(t) = & \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi_2[\square]}{\partial x_i} \right)_0 \Delta x_i(t) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 \varphi_2[\square]}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 \Delta x_i(t) \Delta x_j(t) + \\ & + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^3 \varphi_2[\square]}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right)_0 \Delta x_i(t) \Delta x_j(t) \Delta x_k(t) + \dots + f_2(t); \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_n(t) = & \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi_n[\square]}{\partial x_i} \right)_0 \Delta x_i(t) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 \varphi_n[\square]}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 \Delta x_i(t) \Delta x_j(t) + \\ & + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^3 \varphi_n[\square]}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right)_0 \Delta x_i(t) \Delta x_j(t) \Delta x_k(t) + \dots + f_n(t), \end{aligned}$$

где  $\Delta x_1(t) = x_1(t) - x_{10}$ ;  $\Delta x_2(t) = x_2(t) - x_{20}$ ; ...,  $\Delta x_n(t) = x_n(t) - x_{n0}$  — отклонения соответствующих переменных от их значений в состоянии установившегося равновесия.

В уравнениях (1.44) отбросим нелинейные члены расположения вследствие их малости в малой окрестности точки установившегося равновесия. В результате получим математическую модель линеаризованной динамической системы

$$\Delta \dot{X}(t) = A(\alpha) \Delta X(t) + F(t), \quad (1.45)$$

где квадратная матрица  $A(\alpha)$  имеет следующий вид

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \varphi_1[\square]}{\partial x_1} \right)_0 & \left( \frac{\partial \varphi_1[\square]}{\partial x_2} \right)_0 & \dots & \left( \frac{\partial \varphi_1[\square]}{\partial x_n} \right)_0 \\ \left( \frac{\partial \varphi_2[\square]}{\partial x_1} \right)_0 & \left( \frac{\partial \varphi_2[\square]}{\partial x_2} \right)_0 & \dots & \left( \frac{\partial \varphi_2[\square]}{\partial x_n} \right)_0 \\ \dots \dots \dots \\ \left( \frac{\partial \varphi_n[\square]}{\partial x_1} \right)_0 & \left( \frac{\partial \varphi_n[\square]}{\partial x_2} \right)_0 & \dots & \left( \frac{\partial \varphi_n[\square]}{\partial x_n} \right)_0 \end{bmatrix},$$

Иногда в векторно-матричном дифференциальном уравнении опускают знак приращения  $\Delta$  и записывают линеаризованное уравнение (1.45) в виде

$$\dot{X}(t) = A(\alpha)X(t) + F(t). \quad (1.46)$$

При этом необходимо помнить то, что если линейное уравнение (1.46) получено в результате линеаризации нелинейного уравнения (1.2), то компоненты вектора состояния  $X(t)$  линейного уравнения (1.46) представляют собой отклонения компонент вектора состояния  $X(t)$  нелинейного уравнения (1.2) от их значений в состоянии установившегося равновесия.

Уравнение (1.46) назовем уравнением первого приближения по отношению к исходному нелинейному уравнению (1.2).

Описанный способ линеаризации нелинейных динамических систем может быть использован лишь в том случае, если правые части системы дифференциальных уравнений (1.42) представляют собой аналитические функции, допускающие разложения в ряды Тейлора. Если же правые части уравнений (1.42) являются неаналитическими функциями, то их разложение в ряды Тейлора невозможно. Кроме того, решения уравнений (1.42) с неаналитическими правыми частями, как правило, являются периодическими, а установившийся режим работы представляет собой режим автоколебаний.

Дифференциальное уравнение (1.7) имеет неаналитическую правую часть, описываемую соотношением (1.11). При малых значениях управляющей функции  $\sigma_\varphi(t)$ , а именно, при

$$|\sigma_\varphi(t)| < U^*, \quad (1.47)$$

во избежание режима «зависания» системы, принудительно организуется режим автоколебаний

$$\sigma_\varphi(t) = A \cdot \sin \omega t, \quad (1.48)$$

где  $A$  – амплитуда автоколебаний,  $\omega$  – частота автоколебаний. Действительно, статическая характеристика электронного блока стабилизатора в соответствии с формулой (1.11) имеет вид представленный на рис. 1.5.

Из рассмотрения рис. 1.5 можно сделать вывод, что функция  $U_y(t)$  является периодической несинусоидальной функцией, которая может быть представлена в виде бесконечного тригонометрического ряда Фурье

$$U_y(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots + a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t + \dots \quad (1.49)$$

Замкнутую нелинейную динамическую систему (1.4)–(1.11) представим в виде, изображенном на рис. 1.6, а амплитудно-частотная характеристика линейной части системы представлена на рис. 1.7.

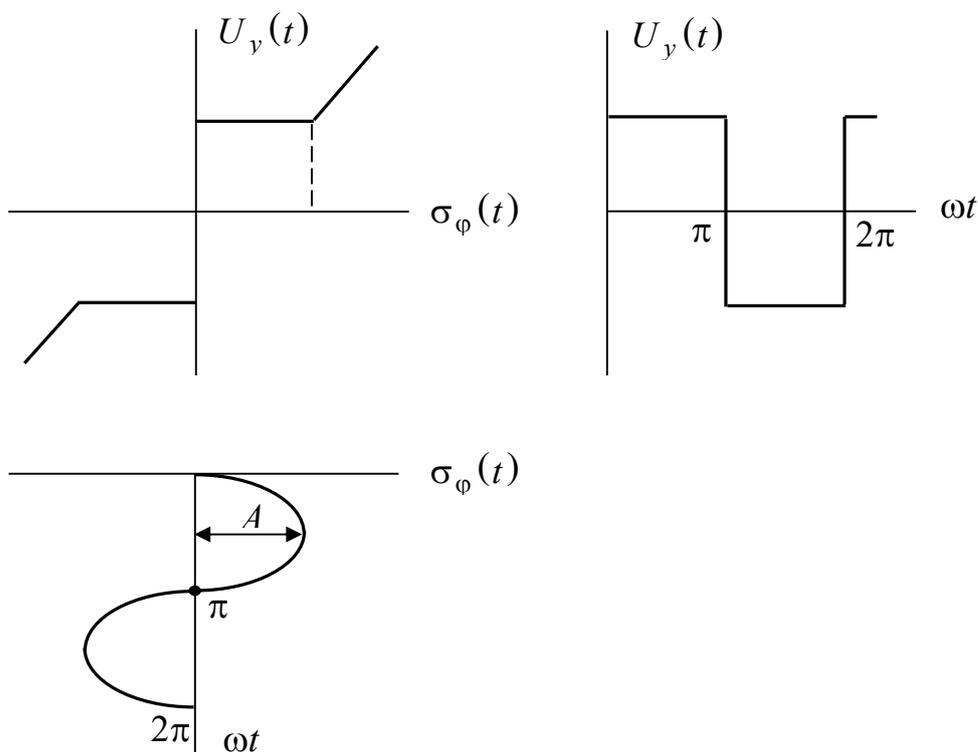


Рис. 1.5. Автоколебания в нелинейной системе наведения и стабилизации

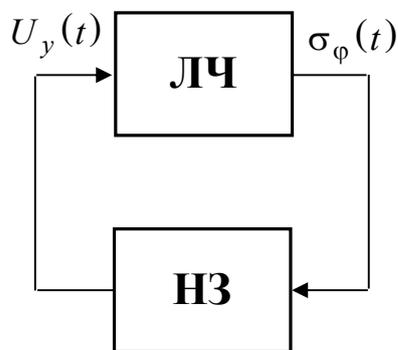


Рис. 1.6. Замкнутая нелинейная система:

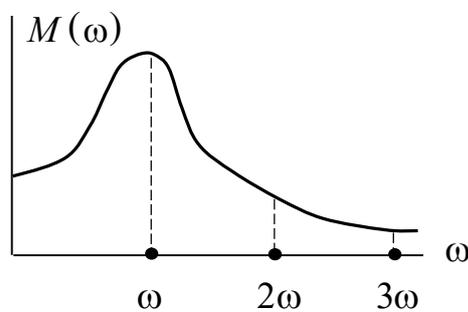


Рис. 1.7. Амплитудно-частотная

ЛЧ – линейная часть;  
НЗ – нелинейное звено

характеристика ЛЧ

Из рис. 1.7 можно сделать заключение, что линейной частью системы хорошо пропускается лишь первая гармоника сигнала (1.49), т. е. линейная часть замкнутой системы является фильтром высоких частот. В этом состоит так называемая гипотеза обобщенного фильтра, составляющая основу метода гармонической линеаризации [14]. В соответствии с этим методом выходной сигнал электронного блока стабилизатора (1.49) представляет в виде

$$U_y(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t = \left[ q(A) + \frac{q_1(A)}{\omega} p \right] \sigma_\varphi(t), \quad (1.50)$$

где  $q(A)$  и  $q_1(A)$  – коэффициенты гармонической линеаризации, зависящие от неизвестной амплитуды автоколебаний сигнала (1.48). Для нелинейной характеристики, приведенной на рис. 1.5, эти коэффициенты равны [14]:

$$q(A) = \frac{4U^*}{\pi A}; \quad q_1(A) = 0. \quad (1.51)$$

Обычно амплитуда  $A$  несколько превышает величину  $U^*$ , а значение коэффициента гармонической линеаризации  $q(A)$  приближенно равно единице, следовательно, соотношение (1.50) приближенно можно записать в виде

$$U_y(t) = \sigma_\varphi(t). \quad (1.52)$$

Таким образом, с помощью метода гармонической линеаризации неаналитическая функция (1.11) в малой окрестности нулевой точки сводится к линейной функции (1.52), а нелинейная математическая модель рассматриваемой динамической системы (1.4)–(1.11) приводится к линейному виду (1.4)–(1.10), (1.52).

## 1.6. Декомпозиция математических моделей динамических систем

Современные технические объекты, как правило, являются сложными системами, содержащими агрегаты разной физической природы, поэтому процессы, протекающие в таких системах, характеризуются различной скоростью изменения соответствующих величин, являющихся элементами вектора состояния динамической системы. Динамические процессы в сложных системах можно разделить на «быстрые» и «медленные». Например, в механических системах к «быстрым» относятся процессы, связанные с упругими колебаниями механических элементов, а к «медленным» – процессы, связанные с изменением перемещения и скорости несущего тела. В гидромеханических системах к «быстрым» относятся процессы, связанные с изменением давления рабочей жидкости, а к «медленным» – процессы, связанные с движением механических частей системы. В электромеханических системах «быстрые» процессы характеризуют изменение электрических токов и электромагнитных полей, а «медленные» – движение механических частей.

Обычно «быстрые» процессы определяются внутренними свойствами динамической системы; эти процессы всегда устойчивы, потому что любой агрегат имеет внутренне демпфирование. В процессе проектирования сложных технических объектов разработчика, как правило, интересует «медленные» процессы, являющиеся обычно рабочими процессами технического объекта. В связи с этим в процессе проектирования технических объектов иногда целесообразно пренебречь «быстрыми» динамическими процессами при рассмотрении «медленных» процессов. Однако такое упрощение математической модели динамической системы должно быть научно обоснованным и не приводить к искажению исследуемых свойств динамической системы.

Каждое движение сложного технического объекта описывается своим дифференциальным уравнением. Если в дифференциальном уравнении выделить постоянные времени, то значения этих постоянных времени характеризуют скорость протекания динамического процесса, описываемого данным дифференциальным уравнением. Чем больше постоянная времени динамического процесса, тем «медленнее» его про-

теkanie во времени и наоборот. В этой связи в работе [15] предложен метод декомпозиции математических моделей сложных динамических систем, основанный на сравнении постоянных времени исследуемых движений и состоит в следующем. Обозначим через  $T_{\overline{6}i}, (i = \overline{1, k})$  постоянные времени «быстрых» движений, а через  $T_{\overline{m}i}, (j = \overline{1, l})$  – постоянные времени «медленных» движений. Если для некоторых  $i = \overline{1, k}$  выполняются соотношения

$$\frac{T_{\overline{6}i}}{T_{\overline{m}i}} \leq 0,05; \quad (i = \overline{1, k}; j = \overline{1, l}), \quad (1.53)$$

то в уравнениях математической модели динамической системы можно пренебречь теми членами, которые содержат постоянные времени  $T_{\overline{6}i}$ , удовлетворяющие условиям (1.53), при рассмотрении «медленных» движений.

Рассмотрим замкнутую систему наведения и стабилизации танковой пушки. К «медленным» движениям в рассматриваемой системе следует отнести стабилизируемое движение пушки, т. е. изменение угла расогласования оси канала ствола танковой пушки от линии прицеливания и угловой скорости поворота пушки относительно оси цапф. В уравнении (1.33) примем обозначение

$$M_f(t) = \sum_{i=1}^n a_i \ddot{T}_i(t). \quad (1.54)$$

Функция  $M_f(t)$  представляет собой «внутреннее» возмущение, действующее на танковую пушку и обусловленное упругими колебаниями ствола.

Введем такое обозначение

$$M_{\Pi}(t) = M_{\text{в}}(t) + M_f(t), \quad (1.55)$$

где функция  $M_{\Pi}(t)$  представляет собой сумму «внутренних» и внешних возмущений, т. е. является суммарным возмущением, действующим на танковую пушку. С учетом соотношений (1.54) и (1.55) уравнение (1.33) принимает вид

$$I_{\Pi} \ddot{\phi}(t) = k_{\text{м}} \Delta p(t) + M_{\Pi}(t). \quad (1.56)$$

Постоянная времени танковой пушки  $T_{\Pi}$  значительно больше по величине постоянной времени  $T_{\Gamma}$  гидросистемы электрогидравлического усилителя, в этой связи при рассмотрении «медленных» движений  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$  можно пренебречь «быстрым» изменением давления рабочей жидкости  $\Delta p(t)$  и вместо дифференциального уравнения (1.9) перейти к алгебраическому уравнению

$$\Delta p(t) = -k_{\text{д}}\beta(t). \quad (1.57)$$

Подставляя (1.57) в (1.56), получаем

$$I_{\Pi} \ddot{\varphi}(t) = -k_{\text{м}}k_{\text{д}}\beta(t) + M_{\Pi}(t). \quad (1.58)$$

Запишем дифференциальное уравнение (1.58) в операторной форме

$$T_{\Pi}^2 p^2 \varphi(t) = -\beta(t) + \frac{1}{k_{\text{м}}k_{\text{д}}} M_{\Pi}(t), \quad (1.59)$$

где постоянная времени танковой пушки  $T_{\Pi}$  определяется формулой

$$T_{\Pi} = \sqrt{\frac{I_{\Pi}}{k_{\text{м}}k_{\text{д}}}}. \quad (1.60)$$

Пусть  $I_{\Pi} = 736,9 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2$ ;  $k_{\text{м}} = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{Па}^{-1}$ ;  $k_{\text{д}} = 1,238 \cdot 10^7 \text{ Па}$ . Тогда в соответствии с формулой (1.60), значение постоянной времени танковой пушки составляет  $T_{\Pi} = 0,315 \text{ с}$ .

Рассмотрим упругие колебания ствола танковой пушки, описываемые дифференциальными уравнениями (1.34). Представим эти уравнения в следующем виде:

$$c_i \ddot{T}_i(t) + \zeta b_i \dot{T}_i(t) + b_i T_i(t) = f_i(t) - a_i \ddot{\varphi}(t); \quad (i = \overline{1, n}). \quad (1.61)$$

Обе части дифференциальных уравнений (1.61) разделим на  $b_i$ ,  $(i = \overline{1, n})$

$$\frac{c_i}{b_i} \ddot{T}_i(t) + \zeta \dot{T}_i(t) + T_i(t) = \frac{1}{b_i} f_i(t) - \frac{a_i}{b_i} \ddot{\varphi}(t); \quad (i = \overline{1, n}). \quad (1.62)$$

Введем обозначения

$$T_{1i}^2 = \frac{c_i}{b_i}; \quad T_{2i} = \zeta$$

Используя данные табл. 1.1, запишем значения постоянных времени  $T_{1i}$  для первых трех членов упругих колебаний ствола:

$$T_{11} = 0,44 \cdot 10^{-1} \text{ с}; \quad T_{12} = 0,247 \cdot 10^{-1} \text{ с}; \quad T_{13} = 0,11 \cdot 10^{-1} \text{ с}.$$

Постоянные времени  $T_{2i}$ , (1,3) для всех трех первых тонов упругих колебаний одинаковы и составляют  $T_{21} = T_{22} = T_{23} = \zeta$ . В работах [16, 17] приведем довольно широкий интервал изменения значений коэффициента внутреннего трения для сталей  $\zeta = (0,002 \div 0,009)$  с.

Рассмотрим отношения постоянных времени «быстрых» движений к постоянным времени «медленных» движений

$$\begin{aligned} \frac{T_{11}}{T_{\Pi}} &= 0,14 > 0,05; & \frac{T_{12}}{T_{\Pi}} &= 0,078 > 0,05; \\ \frac{T_{13}}{T_{\Pi}} &= 0,035 < 0,05; & \frac{\zeta}{T_{\Pi}} &= 0,029 < 0,05. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Анализ неравенств (1.63) позволяет сделать вывод о том, что в математической модели объекта стабилизации (1.33), (1.34) необходим учет первых двух форм упругих колебаний ствола танковой пушки. Тогда математическая модель объекта стабилизации записывается в виде

$$\begin{aligned} I_{\Pi} \ddot{\varphi}(t) &= -k_{\text{м}} k_{\text{д}} \beta(t) + M_b(t) + a_1 \ddot{T}_1(t) + a_2 \ddot{T}_2(t); \\ a_1 \ddot{\varphi}(t) + c_1 \ddot{T}_1(t) + \zeta b_1 \dot{T}_1(t) + b_1 T_1(t) &= f_1(t); \\ a_2 \ddot{\varphi}(t) + c_2 \ddot{T}_2(t) + \zeta b_2 \dot{T}_2(t) + b_2 T_2(t) &= f_2(t). \end{aligned} \quad (1.64)$$

Уравнение возмущенного движения гирорамы в линейной постановке получено в работе [4] и записывается в виде

$$\left\{ \frac{T_x T_y}{k_p k_x k_y H} p^3 + \frac{T_x + T_y}{k_p k_x k_y H} p^2 + \frac{H}{k_p} p + 1 \right\} \beta(t) = 0, \quad (1.65)$$

где  $H$  – кинетический момент ротора;  $T_x, T_y$  – постоянные времени, определяемые соотношениями

$$T_x = \frac{I_\alpha}{f_\alpha}; \quad T_y = \frac{I_\beta}{f_\beta}, \quad (1.66)$$

$I_\alpha$  – момент инерции ротора, внутренней рамки и внешней рамки относительно оси внешней рамки;  $I_\beta$  – момент инерции ротора и внутренней рамки относительно оси внутренней рамки;  $f_\alpha, f_\beta$  – коэффициенты, определяемые формулами:

$$k_p = H \left( \frac{1}{T_x} + \frac{1}{T_y} \right); \quad k_x = \frac{1}{f_\alpha}; \quad k_y = \frac{1}{f_\beta}. \quad (1.67)$$

Пусть  $f_\alpha = f_\beta = 0,15 \cdot 10^{-1} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ ;  $I_\alpha = 0,189 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ ;

$I_\beta = 0,451 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ ;  $H = 0,2 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ .

Тогда значения постоянных времени гироскопа составляют

$$\begin{aligned} T_{\Gamma 1} &= \sqrt{\frac{T_x T_y}{k_p k_x k_y H}} = 0,486 \cdot 10^{-2} \text{ с}; \\ T_{\Gamma 2} &= \sqrt{\frac{T_x T_y}{k_p k_x k_y H}} = 0,455 \cdot 10^{-2} \text{ с}; \\ T_{\Gamma 3} &= \frac{H}{k_p} = 0,242 \cdot 10^{-2} \text{ с}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Для значений постоянных времени (1.68) неравенства (1.53) выполняются.

Движение гироскопа с релейной системой разгрузки, обеспечивающей более высокую точность измерения, и с учетом «сухого» трения в осях карданова подвеса рассмотрено в работе [3]. Использование метода гармонической линеаризации правого к следующему дифференциальному уравнению гармонически линеаризованной системы:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{I_\alpha I_\beta}{H} p^3 + \left[ \frac{4I_\alpha K_\beta}{\pi H B \omega} + \frac{4I_\beta K_\alpha}{\sqrt{\pi^2 I_\beta^2 B^2 \omega^4 + 16K_\beta^2}} \right] p^2 + \right. \\
& + \left. \left[ H + \frac{16K_\alpha K_\beta}{\pi B \omega \sqrt{\pi^2 I_\beta^2 B^2 \omega^4 + 16K_\beta^2}} - \frac{2M_p^* \beta^*}{\pi B^2 \omega} (1+m) \right] p + \right. \\
& \left. + \frac{2M_p^*}{\pi B} \left( \sqrt{1 - \left( \frac{\beta^*}{B} \right)^2} + \sqrt{1 - \left( \frac{m\beta^*}{B} \right)^2} \right) \right\} \beta(t) = 0,
\end{aligned} \quad (1.69)$$

где  $B$  – амплитуда автоколебаний внутренней рамки относительно внешней;  $\omega$  – частота автоколебаний  $K_\alpha$ ,  $K_\beta$  – величины «сухого» трения в осях рамок;  $M_p^*$  – момент разгрузки, создаваемый электромагнитом разгрузки с релейной характеристикой;  $\beta^*$  – величина зоны нечувствительности релейной характеристики;  $m$  – гистерезис релейной характеристики.

Особенностью гармонически линейризованного уравнения (1.69) является зависимость его коэффициентов от амплитуды и частоты автоколебаний рамок гиролатформы.

Из уравнения (1.69) можно записать

$$T_{r1}^3 = \frac{I_\alpha I_\beta}{H} \left[ \frac{2M_p^*}{\pi B} \left( \sqrt{1 - \left( \frac{\beta^*}{B} \right)^2} + \sqrt{1 - \left( \frac{m\beta^*}{B} \right)^2} \right) \right]^{-1}; \quad (1.70)$$

$$T_{r2}^2 = \frac{2 \left[ \frac{I_\alpha K_\beta}{\pi H B \omega} + \frac{I_\beta K_\alpha}{\sqrt{\pi^2 I_\beta^2 B^2 \omega^4 + 16K_\beta^2}} \right]}{\frac{M_p^*}{\pi B} \left( \left( \sqrt{1 - \left( \frac{\beta^*}{B} \right)^2} + \sqrt{1 - \left( \frac{m\beta^*}{B} \right)^2} \right) \right)}; \quad (1.71)$$

$$T_{r3} = \frac{H + \frac{16K_{\alpha}K_{\beta}}{\pi B \omega \sqrt{\pi^2 I_{\beta}^2 B^2 \omega^4 + 16K_{\beta}^2}} - \frac{2M_p^* \beta^*}{\pi B^2 \omega} (1+m)}{\frac{2M_p^*}{\pi B} \left( \sqrt{1 - \left(\frac{\beta^*}{B}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{m\beta^*}{B}\right)^2} \right)}. \quad (1.72)$$

Пусть  $K_{\alpha} = K_{\beta} = 0,653 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $M_p^* = 0,196 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $m = 0,5$ ;  $\beta^* = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$ ;  $B = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$ . Тогда значения постоянных времени гироскопа, определяемых соотношениями (1.70)–(1.72), составляют  $T_{r1} = 0,765 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ ;  $T_{r2} = 0,063 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ ;  $T_{r3} = 0,19 \cdot 10^{-2} \text{ с}$ . Полученные значения постоянных времени удовлетворяют неравенству (1.68), следовательно, «быстрыми» колебаниями рамок гироскопа можно пренебречь при рассмотрении «медленных» движений танковой пушки.

Постоянные времени  $T_{1c}$  и  $T_{2c}$  гироскопического датчика условий скорости определяются соотношениями [4]

$$T_{1c}^2 = \frac{I_{\beta}}{c}; \quad T_{2c} = \frac{f}{c}, \quad (1.73)$$

где  $I_{\beta}$  – момент генерации ротора с рамкой относительно оси поворота рамки;  $f$  – коэффициент жидкостного трения в осях рамки;  $c$  – коэффициент жесткости упругого элемента датчика.

Пусть  $I_{\beta} = 0,451 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ ;  $f = 0,55 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ ;  $c = 3,21 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Тогда значения постоянных времени (1.73) составляют  $T_{1c} = 0,37 \cdot 10^{-2} \text{ с}$ ;  $T_{2c} = 0,017 \text{ с}$ . В результате получаем

$$\frac{T_{1c}}{T_{\Pi}} = 0,0117 < 0,05; \quad \frac{T_{2c}}{T_{\Pi}} = 0,0494 < 0,05.$$

Неравенства (1.53) удовлетворяются, следовательно, «быстрыми» колебаниями рамки гироскопа можно пренебречь при изучении «медленных» движений танковой пушки.

Таким образом, дифференциальные уравнения возмущенного движения гироскопических датчиков угла и угловой скорости (1.4) и (1.5) при рассмотрении «медленных» движений танковой пушки могут быть представлены в виде алгебраических уравнений

$$\bar{U}_\varphi = K_\Gamma \varphi(t); \quad \bar{U}_\omega = k_c \omega(t) = k_c \dot{\varphi}(t). \quad (1.74)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1.7), описывающее изменение электрического тока в обмотке управления электромагнита электрогидравлического усилителя. Разделим обе части уравнения (1.7) на  $r_0$

$$\left( \frac{L_0}{r_0} p + 1 \right) i_y(t) = \frac{1}{r_0} U_y(t). \quad (1.75)$$

Введем обозначения

$$T_0 = \frac{L_0}{r_0}; \quad k_0 = \frac{1}{r_0}$$

и запишем уравнение (1.75) в виде

$$(T_0 p + 1) i_y(t) = k_0 U_y(t). \quad (1.76)$$

Пусть  $L_0 = 0,001$  Гн;  $r_0 = 100$  Ом. Тогда значение постоянной времени обмотки  $T_0$  составляет

$$T_0 = 0,1 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

Отношение постоянных времени «быстрых» и «медленных» движений составляют

$$\frac{T_0}{T_\Pi} = 0,317 \cdot 10^{-4} < 0,05,$$

Следовательно от дифференциального уравнения (1.76) при рассмотрении «медленных» движений можно перейти к алгебраическому

$$i_y(t) = k_0 U_y(t). \quad (1.77)$$

Перейдем к рассмотрению дифференциального уравнения (1.8). Разделим обе части уравнения на  $c$

$$\left( \frac{I_k}{c} p^2 + \frac{f}{c} p + 1 \right) \beta(t) = \frac{k_e}{c} i_y(t). \quad (1.78)$$

Вводя обозначения

$$\frac{I_k}{c} = T_{1p}^2; \quad \frac{f}{c} = T_{2p},$$

уравнение (1.78) может быть представлено в виде

$$(T_{1p}^2 p^2 + T_{2p} p + 1) \beta(t) = \frac{k_e}{c} i_y(t) \quad (1.79)$$

Положим  $I_k = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ ;  $f = 0,5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ ;  $c = 3 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Тогда значения постоянных времени уравнения (1.79) составляют  $T_{1p} = 0,018 \text{ с}$ ;  $T_{2p} = 0,167 \cdot 10^{-2} \text{ с}$ , а отношения постоянных времени «быстрых» и «медленных» движений равны

$$\frac{T_{1p}}{T_{\Pi}} = 0,057 > 0,05; \quad \frac{T_{2p}}{T_{\Pi}} = 0,0053 < 0,05. \quad (1.80)$$

Первое неравенство (1.80) не удовлетворяет условию (1.53), следовательно, уравнение (1.8) не может быть упрощено и «быстрыми» движениями, описываемыми уравнением (1.8), нельзя пренебречь при изучении «медленных» движений танковой пушки.

Учитывая вышеизложенное, упрощенная математическая модель возмущенного движения замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} I_{\Pi} \ddot{\varphi}(t) &= -k_m k_d \beta(t) + M_{\Pi}(t); \\ I_k \ddot{\beta}(t) + f \dot{\beta}(t) + c \beta(t) &= \frac{k_e}{r_0} U_y(t); \\ U_y(t) &= \begin{cases} \sigma_{\varphi}(t) & \text{при } U^* \leq |\sigma_{\varphi}(t)| \leq U^{**}; \\ U^* \text{sign } \sigma_{\varphi}(t) & \text{при } |\sigma_{\varphi}(t)| < U^*; \\ U^{**} \text{sign } \sigma_{\varphi}(t) & \text{при } |\sigma_{\varphi}(t)| > U^{**}; \end{cases} \quad (1.81) \\ \sigma_{\varphi}(t) &= k_{\varphi} k_r \varphi(t) + k_{\dot{\varphi}} k_c \dot{\varphi}(t). \end{aligned}$$

Для линеаризованной замкнутой системы наведения и стабилизации ее математическая модель записывается

$$\begin{aligned}
I_{\Pi} \dot{\varphi}(t) &= -k_{\text{м}} k_{\text{д}} \beta(t) + M_{\Pi}(t); \\
I_k \ddot{\beta}(t) + f \dot{\beta}(t) + c \beta(t) &= \frac{k_e}{r_o} [k_{\varphi} k_{\Gamma} \varphi(t) + k_{\dot{\varphi}} k_c \dot{\varphi}(t)].
\end{aligned}
\tag{1.82}$$

### 1.7. Идентификация математических моделей динамических систем

Основным требованием, предъявляемым к математическим моделям динамических систем, является адекватность модели реальному объекту. В процессе моделирования разработчику технической системы не всегда известны точные (а иногда и приближенные) значения конструкторских параметров системы. В этой связи, после построения математической модели динамической системы обязательным шагом к ее практическому использованию является идентификация модели с использованием эксперимента, проведенного с реальным объектом.

В качестве примера рассмотрим математическую модель упругой танковой пушки (1.64). В этой модели заранее неизвестно значение коэффициента внутреннего трения материала ствола  $\zeta$ , зависящего от многих факторов и, прежде всего, от состава стали, из которой изготовлен ствол. Для оценки значения этого параметра на кафедре колесных и гусеничных машин Национального технического университета «Харьковский политехнический институт» был изготовлен исследовательский стенд на базе танка Т-64Б, схема которого приведена на рис. 1.8.

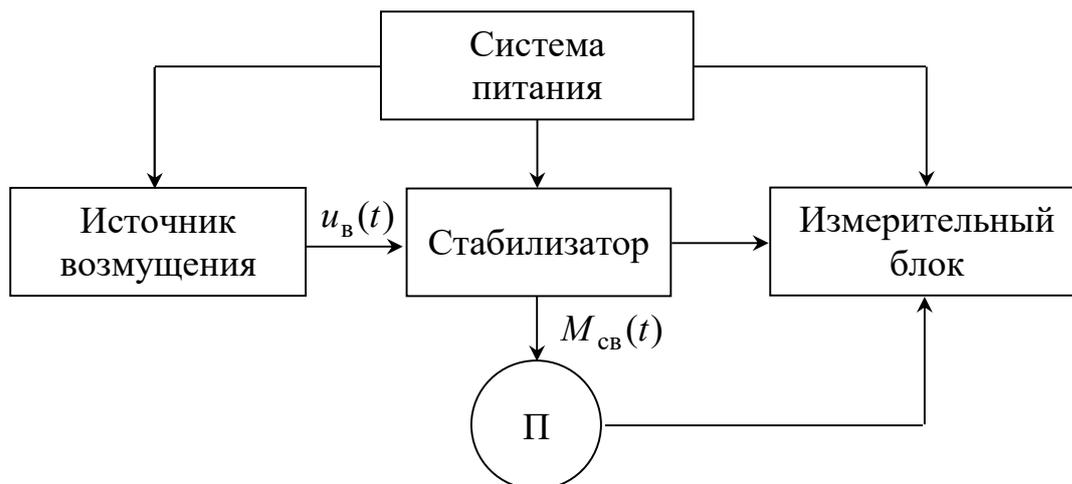


Рис. 1.8. Схема исследовательского стенда

В качестве системы питания экспериментального исследовательского стенда использовался выпрямительный агрегат ВАКС-4,5-30. Такой агрегат преобразует трехфазный переменный ток напряжением 380 В и частотой 50 Гц в постоянный ток и используется для питания потребителей энергии постоянным током напряжением до 30 В. Таким образом, агрегат ВАКС-4,5-30 имитирует работу аккумуляторных батарей и стартер-генератора системы электрооборудования танка.

Источник возмущения представляет собой генератор колебаний синусоидальной формы ГЗ-16 с максимальной амплитудой выходного сигнала 25 В и частотой от 0,01 Гц до 100 Гц. С выхода источника возмущения синусоидальный электрический сигнал

$$u_B(t) = A \sin \omega t. \quad (1.83)$$

подается на обмотку управления электромагнита электрогидравлического усилителя канала вертикального наведения стабилизатора танковой пушки. При этом на выходе стабилизатора формируется момент возмущения  $M_{св}(t)$ , приложенный к танковой пушке.

Измерительный блок получает с выхода электронного блока стабилизатора выпрямленные сигналы  $\bar{U}_\varphi(t)$  и  $\bar{U}_\omega(t)$ . Измерительный блок содержит также усилитель 8-АНЧ-7М, на входы которого попадают сигналы с выходов тензорезисторов, наклеенных на ствол танковой пушки. Тензорезисторы используются для измерения деформаций ствола, вызванных его упругими колебаниями. Схема наклейки тензорезисторов на ствол танковой пушки приведена на рис. 1.9.

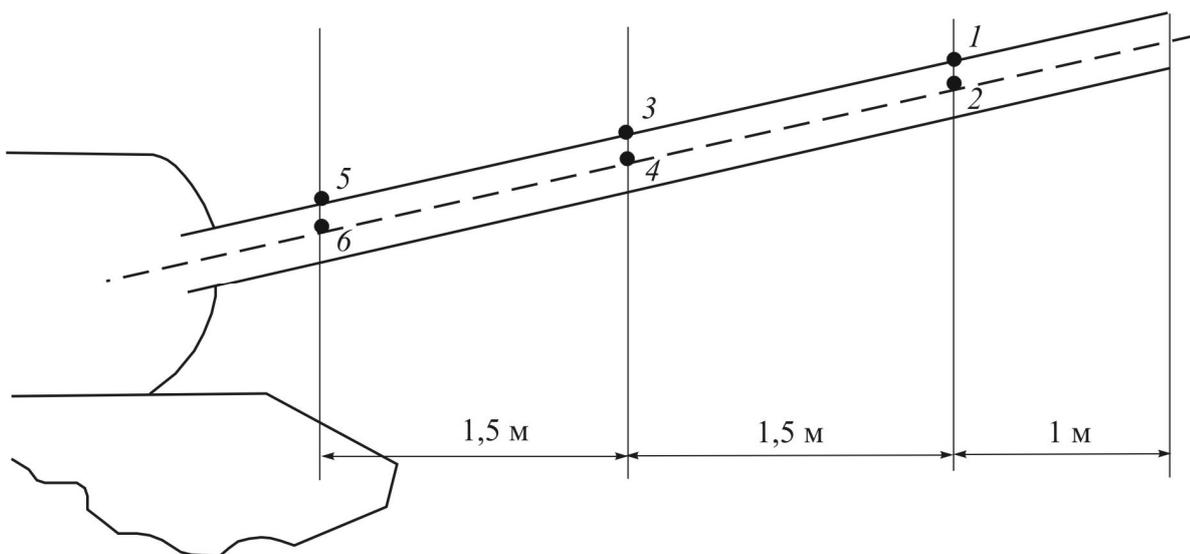


Рис. 1.9. Схема наклейкости тензорезисторов на ствол танковой пушки

Электрические сигналы с выхода измерительного блока поступают ко входам регистрирующей аппаратуры – светолучевого осциллографа К-20-22, записывающего эти сигналы на светочувствительную фотоленту, которая перемещается с различными скоростями. На фотоленте, помимо сигналов, вертикальными полосами отмечается текущее время. Полосы чередуются через 1,0 с и 0,2 с.

Таким образом, разработанный экспериментальный стенд работает в условиях неподвижного танка, а колебания подрессоренной части корпуса имитируются синусоидальными сигналами (1.83) с выхода источника возбуждения.

На рис. 1.10 приведена осциллограмма процессов, регистрируемых с помощью осциллографа для различных частот сигнала (1.83). Амплитуда упругих колебаний ствола возрастает с приближением частоты сигнала (1.83) к резонансной частоте первого тона. Период первого тона упругих колебаний ствола составляет 0,0986 с, следовательно, резонансная частота первого тона упругих колебаний ствола равна

$$\omega_{1p} = 10,14 \text{ Гц.} \quad (1.84)$$

Обе части дифференциального уравнения (1.40) при  $i = 1$  разделим на  $b_1$

$$\frac{c_1}{b_1} \Delta \ddot{T}_1(t) + \zeta \Delta \dot{T}_1(t) + \Delta T_1(t) = \frac{k_1}{b_1} \ddot{z}_k(t).$$

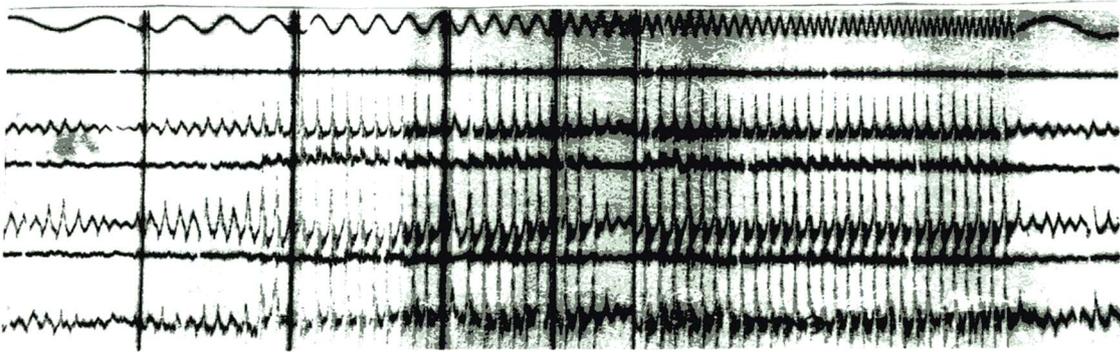


Рис. 1.10. Осциллограмма процессов, регистрируемых с помощью осциллографа для различных частот сигнала (1.83)

Обозначим

$$T_1^2 = \frac{c_1}{b_1}, \quad (1.85)$$

тогда передаточная функция упругого ствола танковой пушки, соответствующая первому тону упругих колебаний ствола, записывается в виде

$$W_1(s) = \frac{k_1}{b_1(T_1^2 s^2 + \zeta s + 1)}. \quad (1.86)$$

Рассмотрим амплитудно-частотную характеристику первого тона колебаний упругой части ствола танковой пушки. Для этого в соотношении (1.86) положим  $s = j\omega$

$$W_1(j\omega) = \frac{k_1}{b_1[(1 - T_1^2 \omega^2) + j\omega\zeta]}. \quad (1.87)$$

В (1.87) выделим действующую мнимую части

$$W_1(j\omega) = U_1(\omega) + jV_1(\omega),$$

где

$$U_1(\omega) = \frac{k_1(1 - T_1^2\omega^2)}{b_1 \left[ (1 - T_1^2\omega^2)^2 + \omega^2\zeta^2 \right]};$$

$$V_1(\omega) = \frac{k_1\omega\zeta}{b_1 \left[ (1 - T_1^2\omega^2)^2 + \omega^2\zeta^2 \right]}.$$

В результате искомая амплитудно-частотная характеристика принимает вид

$$M_1(\omega) = \sqrt{U_1^2(\omega) + V_1^2(\omega)} = \frac{k_1}{b_1 \sqrt{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + \omega^2\zeta^2}}. \quad (1.88)$$

Функция (1.88) достигает максимума, если выражение под квадратным корнем достигает минимума. Введем обозначение

$$f(\omega^2) = (1 - T_1^2\omega^2)^2 + \omega^2\zeta^2. \quad (1.89)$$

Продифференцируем правую часть (1.89) по  $\omega^2$  и результат дифференцирования приравняем нулю

$$2(1 - T_1^2\omega^2)(-T_1^2) + \zeta^2 = 0. \quad (1.90)$$

Из (1.90) получаем

$$\zeta = T_1 \sqrt{2(1 - T_1^2\omega^2)}. \quad (1.91)$$

Подставляя в (1.85) данные табл. 1, имеем

$$T_1^2 = 0,0097 \text{ с}^2. \quad (1.92)$$

Подставляя в формулу (1.91) значения величин  $T_1^2$  и  $\omega$  из соотношений (1.84) и (1.92), получаем оценку коэффициента внутреннего трения материала ствола

$$\zeta = 0,0082 \text{ с}.$$

В математических моделях (1.81) и (1.82) неизвестными являются величины  $I_k$ ,  $f$  и  $c$ , т. е. значения параметров электромагнита управления электрогидравлического усилителя. Для оценки этих параметров был использован экспериментальный стенд, созданный на Харьковском

машиностроительном заводе «ФЭД». Структурная схема стенда представлена на рис. 1.11, где приняты обозначения: ЗУ – заправочная установка; Ф1, Ф2 – фильтры гидравлические; Д1, Д2, Д3, Д4 – дроссели гидравлические; МН1, МН2, МН3 – манометры гидравлические (10 МПа); ЭГУ – электрогидравлический усилитель; Ц – цилиндр гидравлический; РА – регистрирующая аппаратура; ИР – измерительный резистор; Т – торсион; З – задатчик.

В качестве задатчика используется генератор ГЗ-16 колебаний синусоидальной формы, которые подаются на обмотку управления ЭГУ, а в качестве регистрирующей аппаратуры – электронно-лучевой осциллограф К-20-22, на вход которого подается сигнал с выхода измерительного резистора ИР.

На вход ЭГУ от задатчика З подадим синусоидальный сигнал

$$i_y(t) = A \sin \omega t, \quad (1.93)$$

постоянной амплитуды  $A = 0,1 \text{ А}$  и с частотой  $\omega$ , изменяемой в интервале  $(20 \div 250) \text{ с}^{-1}$ . Тогда поршень гидроцилиндра Ц без нагрузки со стороны торсиона Т совершает синусоидальные колебания

$$x(t) = B(\omega) \sin[\omega t + \psi(\omega)], \quad (1.94)$$

где  $B(\omega)$  – амплитуда колебаний поршня гидроцилиндра, зависящая от частоты сигнала;  $\psi(\omega)$  – фазовый сдвиг выходного сигнала (1.94) относительно выходного (1.93).

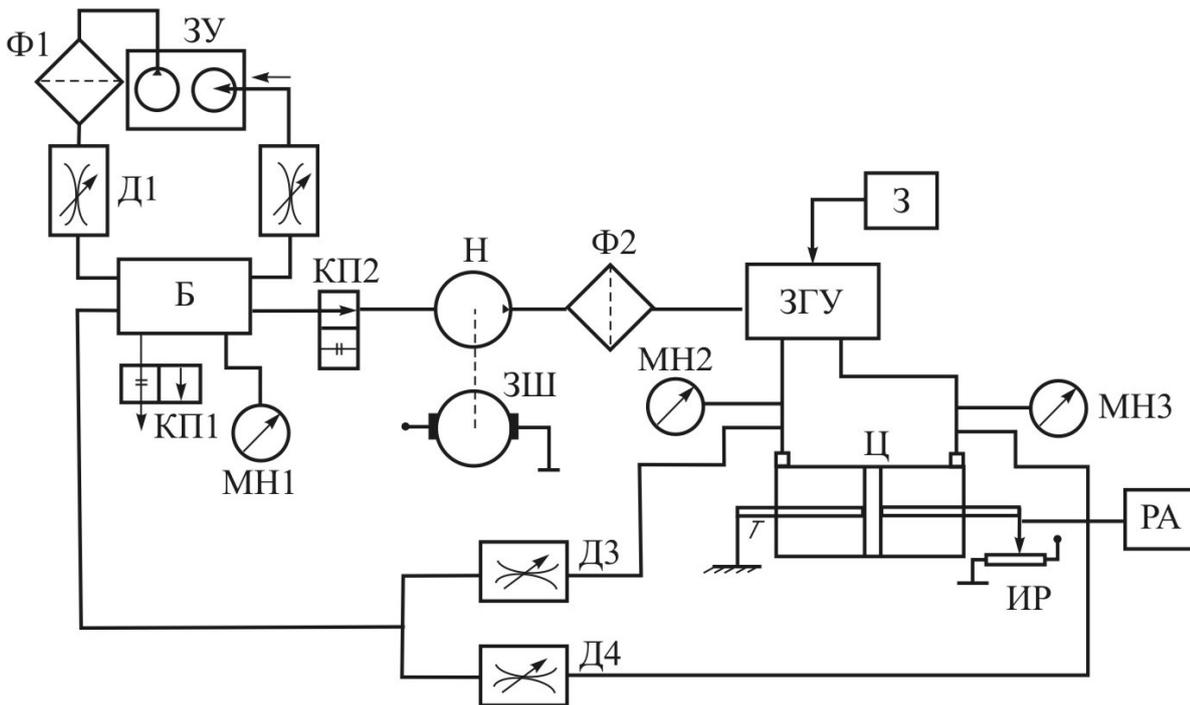


Рис. 1.11. Структурная схема экспериментального стенда

Ордината амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) разомкнутого гидропривода представляет собой отношение амплитуды выходного сигнала (1.94), соответствующей текущей частоте  $\omega$ , к амплитуде входного сигнала (1.93)

$$M_{\omega}(\omega) = \frac{B(\omega)}{A}. \quad (1.95)$$

Экспериментально полученную при помощи описанного выше исследовательского стенда АЧХ разомкнутого гидропривода обозначим  $M_{\omega}(\omega)$ , в отличие от расчетной АЧХ  $W_p(\omega)$ , полученной с помощью уравнения возмущенного движения ЭГУ (1.8) и уравнения возмущенного движения поршня гидроцилиндра

$$m_n \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt} = k_m \Delta p(t), \quad (1.96)$$

где  $x(t)$  – перемещение поршня;  $m_n$  – масса поршня;  $k_m$  – коэффициент пропорциональности.

Из уравнений (1.8) и (1.96) запишем соотношения для передаточной функции электромагнита и поршня гидроцилиндра соответственно:

$$W_{\text{эм}}(s) = \frac{k_e}{I_k s^2 + fs + c}; \quad (1.97)$$

$$W_{\text{гц}}(s) = \frac{k_m}{s^2}. \quad (1.98)$$

Передаточная функция разомкнутого гидропривода канала вертикального наведения равна произведению передаточных функций (1.97) и (1.98)

$$W_p(s) = \frac{k_m k_e}{s^2 (I_k s^2 + fs + c)}. \quad (1.99)$$

В соотношении (1.99) произведем формальную замену  $s = j\omega$  и выделим действительную и мнимую часть

$$U_p(\omega) = \operatorname{Re} W_p(j\omega) = \frac{k_m k_e (c - I_k \omega^2)}{\omega^2 [(c - I_k \omega^2)^2 + \omega^2 f^2]}; \quad (1.100)$$

$$V_p(\omega) = \operatorname{Im} W_p(j\omega) = \frac{k_m k_e f}{\omega^2 [(c - I_k \omega^2)^2 + \omega^2 f^2]}; \quad (1.101)$$

$$M_p(\omega) = \sqrt{U_p^2(\omega) + V_p^2(\omega)} = \frac{k_m k_e}{\omega^2 \sqrt{(c - I_k \omega^2)^2 + \omega^2 f^2}}. \quad (1.102)$$

Введем в рассмотрение вектор неотрицательных параметров ЭГУ

$$a = [I_k \quad f \quad c]^T.$$

На рис. 1.12 приведены две АЧХ привода вертикального наведения: 1 – экспериментальная АЧХ  $M_э(\omega)$ , полученная с помощью исследовательского стенда; 2 – расчетная АЧХ  $M_p(\omega)$ , построенная с помощью соотношения (1.102) при значениях компонент вектора  $a = a_0$  в стартовой точке

$$a_0 = [I_{k0} \quad f_0 \quad c_0]^T = [1 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 \quad 0,5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \quad 3 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}]^T$$

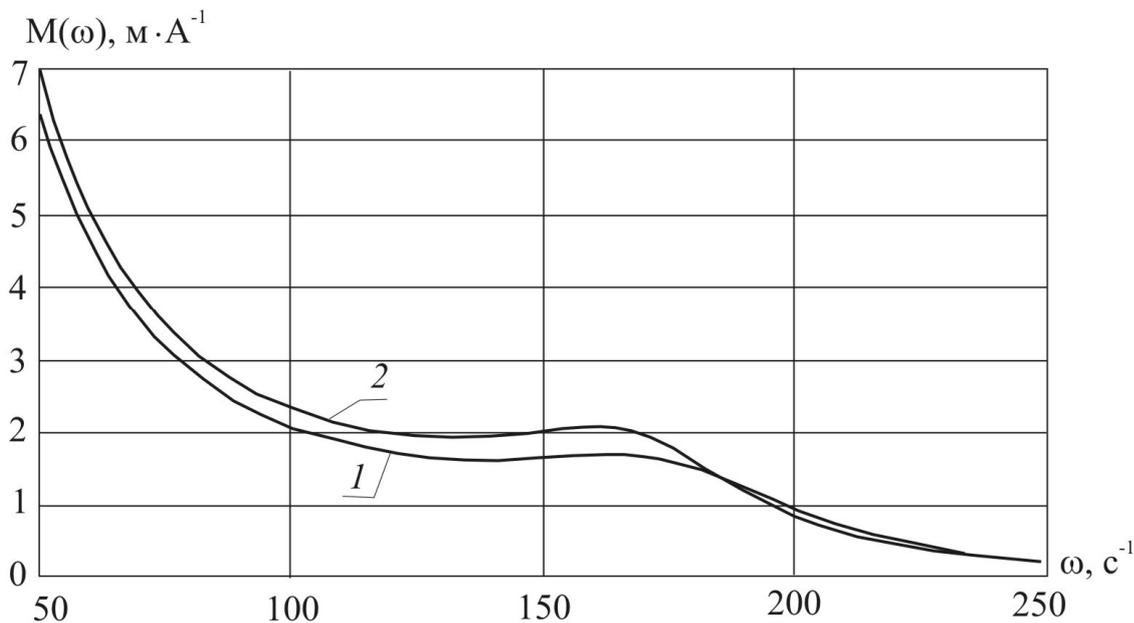


Рис. 1.12. Экспериментальная (1) и расчетная (2) АЧХ разомкнутого гидропривода вертикального наведения

Выберем функцию невязок в виде

$$I(\alpha) = \sum_{j=0}^N [M_y(\omega) - M_p(\omega)]^2, \quad (1.103)$$

где  $N$  – число точек сравнений в интервале  $\omega = (20 \div 250) \text{ с}^{-1}$ . Из рассмотрения рис. 1.12 можно сделать заключение о том, что функции  $M_y(\omega)$  и  $M_p(\omega)$  изменяются достаточно плавно. Поэтому в заданном интервале частот достаточно выбрать число  $N$  равным 230, т. е. сравнение экспериментальной и расчетной АЧХ достаточно производить с шагом  $\Delta\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ . Используя программный продукт Optimization Toolbox, осуществим поиск вектора  $\alpha$ , доставляющего минимум функции (1.103), который достигается при следующих значениях неопределенных параметров ЭГУ:

$$I_k = 0,98 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2; \quad f = 0,55 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}; \quad c = 3,21 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

## 1.8. Имитационное моделирование внешних возмущений, действующих на танковую пушку

При движении танка по местности на танковую пушку действуют возмущения, определяемые формулами (1.23), (1.24) и (1.36). Анализ этих формул приводит к выводу, что внешние возмущения, действующие на танковую пушку в канале вертикального наведения определяется угловыми скоростями и линейными ускорениями вынужденных колебаний подрессоренной части корпуса танка.

Математическая модель вынужденных колебаний корпуса танка в линейной подвеске рассмотрена в работе [18] и записывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{G_k}{g} \ddot{z}_k(t) + 2q\delta \dot{z}_k(t) + 2rcz_k(t) + \delta \sum_{j=1}^{2q} l_j \dot{\phi}_k(t) + c \sum_{i=1}^{2r} l_i \phi_k(t) = \\ = c \left[ \sum_{i=1}^r h_n \left( t + \frac{l_i}{v} \right) + \sum_{i=1}^r h_n \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right] + \delta \left[ \sum_{j=1}^q \dot{h}_n \left( t + \frac{l_j}{v} \right) + \sum_{j=1}^q \dot{h}_n \left( t + \frac{l_j}{v} \right) \right]; \end{aligned} \quad (1.104)$$

$$\begin{aligned} I_y \ddot{\phi}_k(t) + \delta \sum_{j=1}^{2q} l_j^2 \dot{\phi}_k(t) + c \sum_{i=1}^{2r} l_i^2 \phi_k(t) + \delta \sum_{j=1}^{2q} l_j \dot{z}_k(t) + c \sum_{i=1}^{2r} l_i z_k(t) = \\ = c \left[ \sum_{i=1}^r l_i h_{\Pi} \left( t + \frac{l_i}{v} \right) + \sum_{i=1}^r l_i h_{\Pi} \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right] + \\ + \delta \left[ \sum_{j=1}^q l_j \dot{h}_{\Pi} \left( t + \frac{l_j}{v} \right) + \sum_{j=1}^q l_j \dot{h}_{\Pi} \left( t + \frac{l_j}{v} \right) \right]; \end{aligned} \quad (1.105)$$

$$\begin{aligned} I_x \ddot{\vartheta}_k(t) + \frac{q\delta B^2}{2} \dot{\vartheta}_k(t) + \frac{rcB^2}{2} \vartheta_k(t) = \frac{cB}{2} \left[ \sum_{i=1}^r h_{\Pi} \left( t + \frac{l_i}{v} \right) - \sum_{i=1}^r h_{\Pi} \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right] + \\ + \frac{\delta B}{2} \left[ \sum_{j=1}^q \dot{h}_{\Pi} \left( t + \frac{l_j}{v} \right) + \sum_{j=1}^q \dot{h}_{\Pi} \left( t + \frac{l_j}{v} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.106)$$

где  $z_k(t)$  – обобщенная координата вертикальных колебаний центра масс подрессоренной части корпуса;  $\phi_k(t)$  – обобщенная координата про-

дольно-угловых колебаний подрессоренной части корпуса;  $\mathfrak{D}_k(t)$  – обобщенная координата поперечно-угловых колебаний подрессоренной части корпуса;  $G_k$  – вес подрессоренной части корпуса;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $I_y$  – момент инерции подрессоренной части корпуса относительно его собственной поперечной оси;  $I_x$  – момент инерции подрессоренной части корпуса относительно его собственной продольной оси;  $c$  – коэффициент жесткости торсиона;  $\delta$  – среднее значение коэффициента демпфирования амортизатора за период колебаний подрессоренной части;  $q$  – число амортизаторов по каждому из бортов;  $r$  – число торсионов по каждому из бортов;  $l_i$  ( $i = \overline{1, r}$ ) – расстояние по горизонтам от собственной поперечной оси инерции подрессоренной части корпуса до точки крепления  $i$ -го торсиона;  $l_j$  ( $j = \overline{1, q}$ ) – то же расстояние до точки крепления  $j$ -го амортизатора;  $l'_i$  ( $i = \overline{1, r}$ ) – то же расстояние до пятна контакта  $i$ -го опорного катка, соответствующего  $i$ -типу торсиону;  $l'_j$  ( $j = \overline{1, q}$ ) – то же расстояние до пятна контакта  $j$ -го опорного катка, соответствующего  $j$ -типу амортизатору;  $B$  – ширина колеи тана (рис. 1.13);  $h_{\Pi} \left( t + \frac{l'_i}{v} \right)$ ,  $h_{\Pi} \left( t + \frac{l'_i}{v} \right)$  – высота неровности поверхности движения под пятном контакта  $i$ -го опорного катка по правому и левому бортам танка соответственно;  $h_{\Pi} \left( t + \frac{l'_j}{v} \right)$ ,  $h_{\Pi} \left( t + \frac{l'_j}{v} \right)$  – высота неровности поверхности движения под пятном контакта  $j$ -го опорного катка по правому и левому бортам танка соответственно;  $v$  – скорость движения танка.

В реальных условиях движения танка расположение неровностей носит случайный характер. Поэтому при рассмотрении движения танка необходимо рассмотреть задачу пространственного моделирования двумерного случайного поля на плоской поверхности с заданными стохастическими характеристиками. Из всего многообразия возможных моделей двумерных случайных поверхностей наиболее предпочтительным является нормальное марковское двумерное поле (НМД-поле)  $H(x, y)$ , поскольку является удобным объектом анализа, а любое его ортогональное сечение является стационарным процессом Орнштейна–Уленбека [19].

Рассмотрим на плоской поверхности три системы координат, представленные на рис. 1.13.

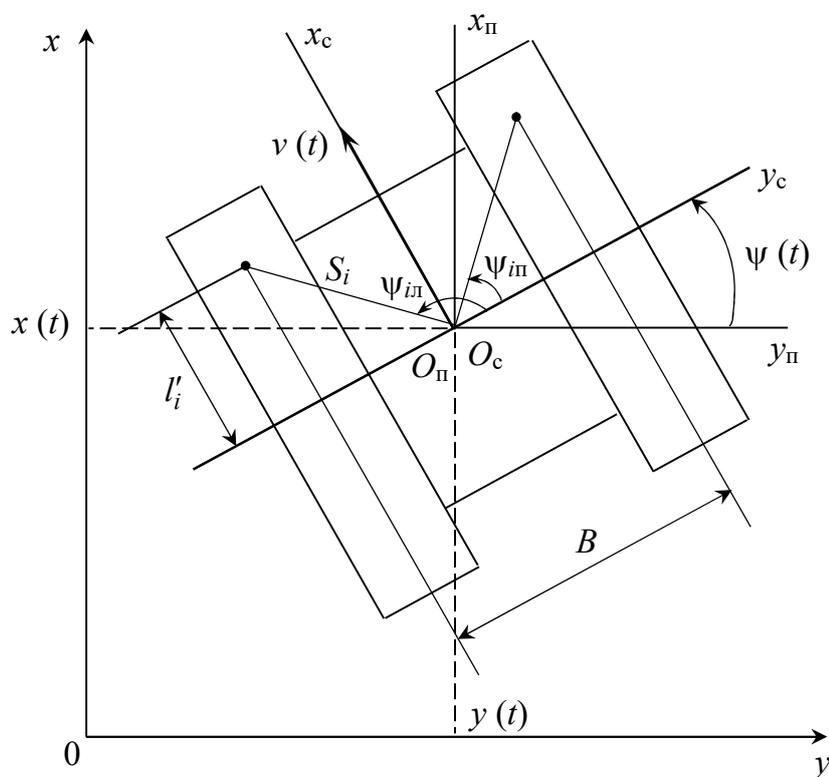


Рис. 1.13. Системы координат:

$Oxy$  – неподвижная;  $O_п x_п y_п$  – подвижная;  $O_c x_c y_c$  – связанная;  $S_i$  – расстояние в горизонтальной плоскости от центра масс подрессоренной части до пятна контакта  $i$ -го опорного катка;  $v(t)$  – текущая скорость движения центра масс;  $\psi$  – текущий угол поворота корпуса

Расстояние  $S_i$  определяется соотношением

$$S_i = \sqrt{\frac{B^2}{4} + l_i'^2}, \quad (i = \overline{1, r}), \quad (1.107)$$

а углы  $\psi_{iп}$  и  $\psi_{iл}$  в горизонтальной плоскости составляют

$$\psi_{iп} = \arctg \frac{2l_i'}{B}; \quad \psi_{iл} = \pi - \arctg \frac{2l_i'}{B}, \quad (i = \overline{1, r}). \quad (1.108)$$

Координаты центра масс корпуса в плоскости  $Oxy$  изменяются в соответствии с формулами:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) \cos \psi(t) dt; \quad (1.109)$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v(t) \sin \psi(t) dt, \quad (1.110)$$

где  $x_0, y_0$  – координаты начальной точки отсчета.

Из рассмотрения рис. 1.13 можно записать соотношения для текущих координат пятен контакта опорных катков правого и левого бортов в процессе криволинейного движения танка:

$$x_{i\pi}(t) = x(t) + S_i \sin \left[ \psi(t) + \arctg \frac{2l'_i}{B} \right]; \quad (i = \overline{1, r}); \quad (1.111)$$

$$y_{i\pi}(t) = y(t) + S_i \cos \left[ \psi(t) + \arctg \frac{2l'_i}{B} \right]; \quad (i = \overline{1, r}); \quad (1.112)$$

$$x_{i\lambda}(t) = x(t) + S_i \cos \left[ \psi(t) + \pi - \arctg \frac{2l'_i}{B} \right]; \quad (i = \overline{1, r}); \quad (1.113)$$

$$y_{i\lambda}(t) = y(t) + S_i \sin \left[ \psi(t) + \pi - \arctg \frac{2l'_i}{B} \right]; \quad (i = \overline{1, r}). \quad (1.114)$$

Поверхность грунта, по которому происходит движение танка, представляет собой НМД-поле  $H(x, y)$ , которое в каждой фиксированной точке  $(x^*, y^*)$  характеризуется высотой неровности  $h(x^*, y^*)$ .

В работе [20] показано, что случайное НМД-поле  $H(x, y)$  можно описать уравнением Ланжевена

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^2} + 2\beta_x \frac{\partial}{\partial x} + \Omega_x^2 \right) \left( \frac{\partial}{\partial y^2} + 2\beta_y \frac{\partial}{\partial y} + \Omega_y^2 \right) h(x, y) = \sigma v[x, y], \quad (1.115)$$

где  $h(x, y)$  – случайная реализация двумерного марковского поля  $H(x, y)$ ;  $\sigma$  – среднее квадратичное отклонение высоты неровности генерируемого поля;  $v[x, y]$  – порождающее поле, обладающее свойствами гауссовского

двумерного «белого шума» единичной интенсивности;  $\beta_x, \beta_y, \Omega_x, \Omega_y$  – характеристики случайного поля по направлениям  $ox$  и  $oy$ .

Если свойства случайного поля  $H(x, y)$  во всех направлениях одинаковы, то  $\beta_x = \beta_y = \beta$  и  $\Omega_x = \Omega_y = \Omega$ .

Для различных типов поверхности движения значения характеристик моделируемого поля приведены в табл. 1.2.

Т а б л и ц а 1 . 2

Стохастические характеристики НМД-поля для различных грунтов

Тип поверхности движения	$\beta, \text{м}^{-1}$	$\Omega, \text{м}^{-1}$	$\sigma, \text{м}$
Асфальтобетон	0,191	0,444	0,0053
Мостовая	0,255	0,669	0,0243
Грунтовая дорога	0,337	1,065	0,1050

Каждой реализации двумерного «белого шума»  $v(x, y), (j = \overline{1, N})$  соответствует реализация  $h_j(x, y), (j = \overline{1, N})$  двумерного марковского поля  $H(x, y)$ , а также реализация случайных функций  $\dot{z}_k(t), \dot{\phi}_k(t), \dot{\vartheta}_k(t)$  и случайных функций  $f_i(t), M_b(t)$  и  $M_f(t)$ .

На рис. 1.14 приведены гистограммы случайной функции  $M_f(t)$ , обусловленной упругими колебаниями ствола пушки, при движении танка по мостовой для каждого из тонов упругих колебаний ствола пушки в отдельности. Анализ этих гистограмм приводит к выводу, что основной вклад в формирование возмущающего момента  $M_f(t)$  вносит первый тон упругих колебаний ствола (до 220 Н·м). Величина возмущения от второго тона достигает 40 Н·м, а от третьего тона не превышает 1 Н·м.

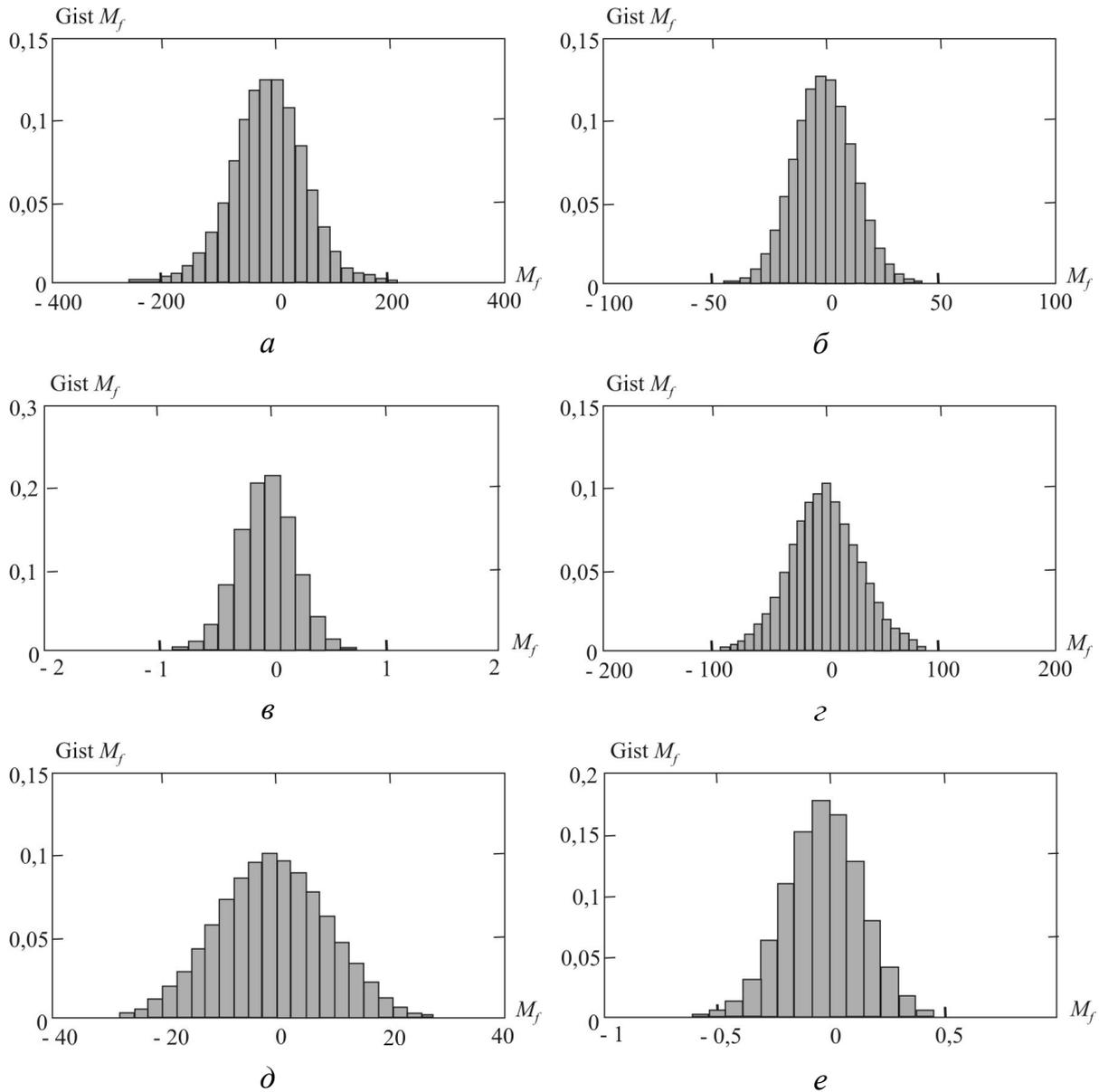


Рис. 1.14. Гистограммы реализаций случайной функции  $M_f(t)$ :

а) первый тон,  $V = 5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ; б) второй тон,  $V = 5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ; в) третий тон,  $V = 5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ; г) первый тон,  $V = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ; д) второй тон,  $V = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ; е) третий тон,  $V = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ .

Таким образом, при имитационном моделировании внешних возмущений, действующих на упругую танковую пушку при движении танка по неровностям, достаточно учитывать первые два тона упругих колебаний ствола танковой пушки. Блок-схема алгоритма моделирования

случайных внешних возмущений, действующих на танковую пушку при движении танка по неровностям грунта, приведена на рис. 1.15.

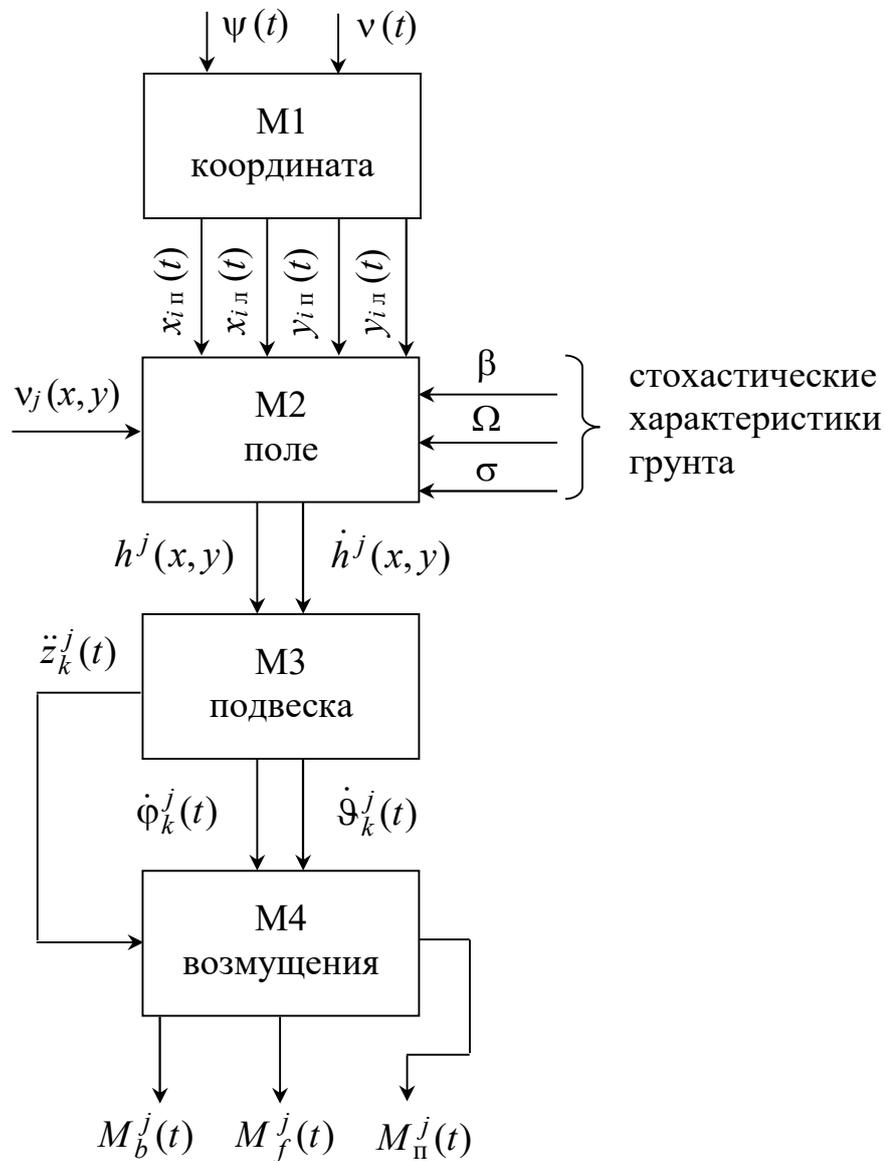


Рис. 1.15. Блок-схема алгоритма моделирования случайных внешних возмущений, действующих на танковую пушку

Модуль М1 «координата» производит вычисление координат пятен контакта опорных катков в плоскости  $(x, y)$  в соответствии с формулами (1.111)–(1.114). На вход модуля подаются переменные  $\psi(t)$  и  $v(t)$ , ис-

пользуя которые модуль М1 вычисляет текущие координаты центра масс в соответствии с формулами (1.109) и (1.110). Текущие значения этих координат подаются на входы модуля М2 «поле», который моделирует нормальное марковское двумерное поле, описываемое уравнением (1.115). На входы модуля М2 «поле», помимо координат пятен контакта опорных катков с поверхностью движения, поступает единичный двумерный «белый шум»  $v_j(x, y)$ , ( $j = \overline{1, N}$ ), где  $j$  – номер реализации случайной функции  $v(x, y)$ . На выходе модуля М2 имеют место случайные функции  $h^j(x, y)$  и  $\dot{h}^j(x, y)$ , причем

$$\dot{h}^j(x, y) = \frac{\partial h^j(x, y)}{\partial x} \dot{x}(t) + \frac{\partial h^j(x, y)}{\partial y} \dot{y}(t), \quad (1.116)$$

поступающие на вход модуля М3 «подвеска», осуществляющего решение системы дифференциальных уравнений (1.104)–(1.106) при

$$h_{\Pi} \left( t + \frac{l'_i}{v(t)} \right) = h^j \left[ x_{i\Pi}(t), y_{i\Pi}(t) \right]; \quad (i = \overline{1, r});$$

$$h_{\Pi} \left( t + \frac{l'_i}{v(t)} \right) = h^j \left[ x_{i\Pi}(t), y_{i\Pi}(t) \right]; \quad (i = \overline{1, r});$$

$$\dot{h}_{\Pi} \left( t + \frac{l'_j}{v(t)} \right) = \dot{h}^j \left[ x_{i\Pi}(t), y_{i\Pi}(t) \right]; \quad (i = \overline{1, r});$$

$$\dot{h}_{\Pi} \left( t + \frac{l'_i}{v(t)} \right) = \dot{h}^j \left[ x_{i\Pi}(t), y_{i\Pi}(t) \right]; \quad (i = \overline{1, r}).$$

На выходе модуля М3 «подвеска» имеют место реализации случайных функций  $\ddot{z}_k^j(t)$ ,  $\dot{\phi}_k^j(t)$  и  $\dot{\vartheta}_k^j(t)$ , соответствующие  $j$ -й реализации

«белого шума»  $v_j(x, y)$ , ( $j = \overline{1, N}$ ). Эти случайные функции поступают на входы модуля М4 «возмущения», формирующего случайные функции  $M_B^j(t)$ ,  $M_f^j(t)$  и  $M_n^j(t)$  в соответствии с формулами (1.24), (1.54) и (1.55).

## СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 2.1. Передаточные функции и характеристические уравнения динамических систем

Математические модели динамических систем, представленные в виде совокупности дифференциальных уравнений, исчерпывающе характеризуют их свойства. Однако при анализе свойств динамических систем часто используют их передаточные функции, выгодно отличающихся от дифференциальных уравнений значительно большей наглядностью.

Пусть на вход линейной динамической системы (1.46) поступает векторное внешнее возмущение  $F(t)$ . При этом возмущенное движение системы описывается изменением компонент вектора состояния  $X(t)$  (рис. 2.1).

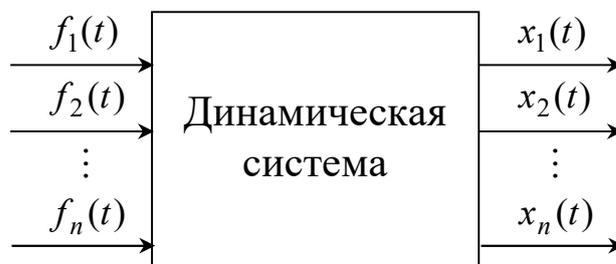


Рис. 2.1. Динамическая система

Передаточной функцией динамической системы  $W_{ij}(s)$  по  $i$ -му выходу относительно  $j$ -го входа назовем отношение преобразования Лапласа  $i$ -го выходного сигнала к преобразованию Лапласа  $j$ -го входного сигнала

$$W_{ij}(s) = \frac{L\{x_i(t)\}}{L\{f_j(t)\}}, \quad (i, j = \overline{1, n}). \quad (2.1)$$

Передаточные функции (2.1) образуют матричную передаточную функцию динамической системы

$$W(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \dots & W_{1n}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \dots & W_{2n}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{n1}(s) & W_{n2}(s) & \dots & W_{nn}(s) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Рассмотрим линеаризованную математическую модель замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки, полученную в результате декомпозиции и линеаризации математической модели (1.4)–(1.11)

$$I_n \ddot{\varphi}(t) = -k_m k_d \beta(t) + M_{\Pi}(t); \quad (2.3)$$

$$I_k \ddot{\beta}(t) + f \dot{\beta}(t) + c \beta(t) = \frac{k_e}{r_0} U_y(t); \quad (2.4)$$

$$U_y(t) = k_{\varphi} k_{\Gamma} \varphi(t) + k_{\dot{\varphi}} k_c \dot{\varphi}(t). \quad (2.5)$$

Структурная система замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки, соответствующая математической модели (2.3)–(2.5), представлена на рис. 2.2.

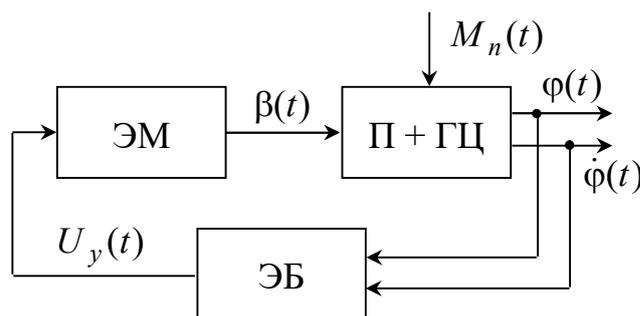


Рис. 2.2. Структурная схема замкнутой системы:  
 ЭМ – электромагнит; П+ГЦ – пушка с гидроцилиндром;  
 ЭБ – электронный блок

Дифференциальное уравнение (2.3) описывает возмущенного движение танковой пушки с исполнительным гидроцилиндром; уравнение (2.4) – движение якоря управляющего электромагнита, а уравнение (2.5) представляет собой алгоритм стабилизации, формируемый электронным блоком.

Математическую модель (2.3)–(2.5) преобразуем по Лапласу

$$I_n s^2 \Phi(s) + k_m k_d B(s) = M_n(s); \quad (2.6)$$

$$(I_k s^2 + f(s) + c) B(s) = \frac{k_e}{r_0} U_y(s); \quad (2.7)$$

$$U_y(s) = (k_\phi k_r \Phi + k_\phi k_c s) \Phi(s), \quad (2.8)$$

где функции  $\Phi(s)$ ,  $B(s)$ ,  $U_y(s)$  и  $M_n(s)$  являются преобразованиями Лапласа соответствующих функций времени  $\Phi(s) = L\{\varphi(t)\}$ ;  $B(s) = L\{\beta(t)\}$ ;  $U_y(s) = L\{U_y(t)\}$ ;  $M_n(s) = L\{M_n(t)\}$ .

Соотношение (2.8) подставим в правую часть (2.7). В результате получаем

$$\begin{aligned} I_n s^2 \Phi(s) + k_m k_d B(s) &= M_n(s); \\ -\frac{k_e}{r_0} (k_\phi k_r + k_\phi k_c s) \Phi(s) + (I_k s^2 + fs + c) B(s) &= 0. \end{aligned}$$

Используя правило Крамера, отыщем соответствующие преобразования Лапласа:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{bmatrix} I_n s^2 & k_m k_d \\ -\frac{k_e}{r_0} (k_\phi k_r + k_\phi k_c s) & I_k s^2 + fs + c \end{bmatrix} = \\ &= I_n s^2 (I_k s^2 + fs + c) + \frac{k_e k_m k_d}{r_0} (k_\phi k_r + k_\phi k_c s). \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\Delta_\varphi = \begin{bmatrix} M_n(s) & k_m k_d \\ 0 & I_k s^2 + fs + c \end{bmatrix} = M_n(s) (I_k s^2 + fs + c); \quad (2.10)$$

$$\Delta_{\beta} = \begin{bmatrix} I_n s^2 & M_n(s) \\ -\frac{k_e}{r_0}(k_{\varphi}k_{\Gamma} + k_{\dot{\varphi}}k_c s) & 0 \end{bmatrix} = M_n(s) \frac{k_e}{r_0} (k_{\varphi}k_{\Gamma} + k_{\dot{\varphi}}k_c s). \quad (2.11)$$

В результате, с учетом обозначения  $k_y = \frac{k_e k_M k_D}{r_0}$ , получаем

$$\Phi(s) = \frac{\Delta_{\varphi}}{\Delta} = \frac{M_n(s)(I_k s^2 + fs + c)}{I_n s^2 (I_k s^2 + fs + c) + k_y (k_{\varphi}k_{\Gamma} + k_{\dot{\varphi}}k_c s)}; \quad (2.12)$$

$$B(s) = \frac{\Delta_{\beta}}{\Delta} = \frac{M_n(s) \frac{k_e}{r_0} (k_{\varphi}k_{\Gamma} + k_{\dot{\varphi}}k_c s)}{I_n s^2 (I_k s^2 + fs + c) + k_y (k_{\varphi}k_{\Gamma} + k_{\dot{\varphi}}k_c s)}. \quad (2.13)$$

Используя соотношения (2.12) и (2.13), запишем соответствующие передаточные функции:

$$W_{11}(s) = \frac{\Phi(s)}{M_n(s)} = \frac{I_k s^2 + fs + c}{I_n s^2 (I_k s^2 + fs + c) + k_y (k_{\varphi}k_{\Gamma} + k_{\dot{\varphi}}k_c s)}; \quad (2.14)$$

$$W_{12}(s) = \frac{s\Phi(s)}{M_n(s)} = \frac{s(I_k s^2 + fs + c)}{I_n s^2 (I_k s^2 + fs + c) + k_y (k_{\varphi}k_{\Gamma} + k_{\dot{\varphi}}k_c s)}; \quad (2.15)$$

$$W_{21}(s) = \frac{B(s)}{M_n(s)} = \frac{\frac{k_e}{r_0} (k_{\varphi}k_{\Gamma} + k_{\dot{\varphi}}k_c s)}{I_n s^2 (I_k s^2 + fs + c) + k_y (k_{\varphi}k_{\Gamma} + k_{\dot{\varphi}}k_c s)}; \quad (2.16)$$

$$W_{22}(s) = \frac{sB(s)}{M_n(s)} = \frac{\frac{k_e}{r_0} s (k_{\varphi}k_{\Gamma} + k_{\dot{\varphi}}k_c s)}{I_n s^2 (I_k s^2 + fs + c) + k_y (k_{\varphi}k_{\Gamma} + k_{\dot{\varphi}}k_c s)}; \quad (2.17)$$

Матричная передаточная функция замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки записывается в виде

$$W(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) \end{bmatrix}$$

Характеристическим уравнением динамической системы (1.46) называется алгебраическое уравнение

$$\det[A(\alpha) - Es] = 0; \quad (2.18)$$

где  $E$  – единичная матрица.

Введем в рассмотрение вектор состояния динамической системы (2.3)–(2.5)

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \\ \beta(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{bmatrix}$$

и представим математическую модель (2.3)–(2.5) в нормальной форме, т. е. в виде системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого разрешим уравнения (2.3)–(2.5) относительно старших производных:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(t) &= -\frac{k_M k_D}{I_n} \beta(t) + \frac{1}{I_n} M_n(t); \\ \ddot{\beta}(t) &= -\frac{c}{I_k} \beta(t) - \frac{f}{I_k} \dot{\beta}(t) + \frac{k_e}{I_k r_0} k_\varphi k_\Gamma \varphi(t) + \frac{k_e}{I_k r_0} k_\dot{\varphi} k_c \dot{\varphi}(t). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Тогда система дифференциальных уравнений (2.19) в нормальной форме записывается

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k_M k_D}{I_n} x_3(t) + \frac{1}{I_n} M_n(t); \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t); \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{k_e}{I_k r_0} k_\varphi k_\Gamma x_1(t) + \frac{k_e}{I_k r_0} k_\dot{\varphi} k_c x_2(t) - \frac{c}{I_k} x_3(t) - \frac{f}{I_k} x_4(t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Варьируемыми параметрами рассматривают системы являются коэффициенты усиления электронного блока стабилизатора  $k_\phi$  и  $k_{\dot{\phi}}$ , следовательно  $\alpha = [k_\phi \ k_{\dot{\phi}}]^T$ .

Тогда матрица  $A(\alpha)$ , называемая собственной матрицей замкнутой системы, принимает вид

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_M k_D}{I_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_e}{I_k r_0} k_\phi k_\Gamma & \frac{k_e}{I_k r_0} k_{\dot{\phi}} k_c & -\frac{c}{I_k} & -\frac{f}{I_k} \end{bmatrix},$$

а характеристическое уравнение замкнутой системы (2.18) записывается

$$\det \begin{bmatrix} -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -s & -\frac{k_M k_D}{I_n} & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 \\ \frac{k_e}{I_k r_0} k_\phi k_\Gamma & \frac{k_e}{I_k r_0} k_{\dot{\phi}} k_c & -\frac{c}{I_k} & -\frac{f}{I_k} - s \end{bmatrix} = 0. \quad (2.21)$$

Раскрывая определитель (2.21), получаем характеристическое уравнение замкнутой системы наведения и стабилизации

$$I_n s^2 (I_k s^2 + fs + c) + k_y (k_\phi k_\Gamma + k_{\dot{\phi}} k_c s) = 0. \quad (2.22)$$

## 2.2. Временные характеристики линейных динамических систем

Переходной функцией  $h_{ij}(t)$  динамической системы, представленной на рис. 2.1, по  $i$ -му выходу относительно  $j$ -го входа

назовем переходный процесс на  $i$ -м выходе  $x_i(t)$  при подаче на ее  $j$ -й вход единичной ступенчатой функции  $1(t)$ , причем

$$f_j(t) = 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Учитывая, что преобразование Лапласа единичной ступенчатой функции (2.23) равно [21]

$$L\{1(t)\} = \frac{1}{s},$$

а также с учетом формулы (2.1), запишем

$$L\{h_{ij}(t)\} = \frac{W_{ij}(s)}{s}. \quad (2.24)$$

Применяя к обеим частям соотношения (2.24) операцию обратного преобразования Лапласа, получаем

$$h_{ij}(t) = L^{-1}\left\{\frac{W_{ij}(s)}{s}\right\}, \quad (i, j = \overline{1, n}). \quad (2.25)$$

Таким образом, переходная функция динамической системы равна обратному преобразованию Лапласа от соответствующей передаточной функции, деленной на  $s$ .

Переходные функции (2.25) образуют матричную переходную функцию динамической системы

$$H(t) = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \dots & h_{1n}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \dots & h_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1}(t) & h_{n2}(t) & \dots & h_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Используя соотношения (2.14)–(2.17) запишем соотношения для переходных функций замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки

$$h_{11}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{I_k s^2 + fs + c}{s \left[ I_n s^2 (I_k s^2 + fs + c) + k_y (k_\phi k_\Gamma + k_\dot{\phi} k_c s) \right]} \right\}; \quad (2.26)$$

$$h_{12}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{I_k s^2 + fs + c}{I_n s^2 (I_k s^2 + fs + c) + k_y (k_\phi k_\Gamma + k_\dot{\phi} k_c s)} \right\}; \quad (2.27)$$

$$h_{21}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\frac{k_e}{r_0} (k_\phi k_r + k_\dot{\phi} k_c s)}{s \left[ I_n s^2 (I_k s^2 + fs + c) + k_y (k_\phi k_\Gamma + k_\dot{\phi} k_c s) \right]} \right\}; \quad (2.28)$$

$$h_{22}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\frac{k_e}{r_0} (k_\phi k_r + k_\dot{\phi} k_c s)}{I_n s^2 (I_k s^2 + fs + c) + k_y (k_\phi k_\Gamma + k_\dot{\phi} k_c s)} \right\}; \quad (2.29)$$

Использование таблиц преобразований Лапласа для получения аналитических выражений функций (2.26)–(2.29) проблематично, вследствие сложности передаточных функций (2.14)–(2.17). Вместе с тем, использование современных программных продуктов, в частности, пакета «Simulink», позволяет построить переходные функции (2.26)–(2.29). Положим  $I_n = 736,9 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ ;  $I_k = 0,98 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ ;  $f = 0,55 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ ;  $c = 3,21 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $k_c = 0,98 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{А}^{-1}$ ;  $r_0 = 30 \text{ Ом}$ ;  $k_d = 1,238 \cdot 10^7 \text{ Па}$ ;  $k_m = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{Па}^{-1}$ ;  $k_y = 0,241 \cdot 10^5 \text{ Н}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{В}^{-1}$ ;  $k_\Gamma = 20 \text{ В}$ ;  $k_c = 5 \text{ В} \cdot \text{с}$ ;  $k_\phi = 100$ ;  $k_\dot{\phi} = 50$ .

Для приведенных значений параметров системы использование пакета «Simulink» приводит к переходным функциям, показанным на рис. 2.3.

Импульсный переходной функцией  $\omega_{ij}(t)$  динамической системы по  $i$ -му выходу относительно  $j$ -го входа назовем переходный процесс на  $i$ -м выходе  $x_i(t)$  при подаче на ее  $j$ -й вход единичной импульсной функции  $\delta(t)$ , причем

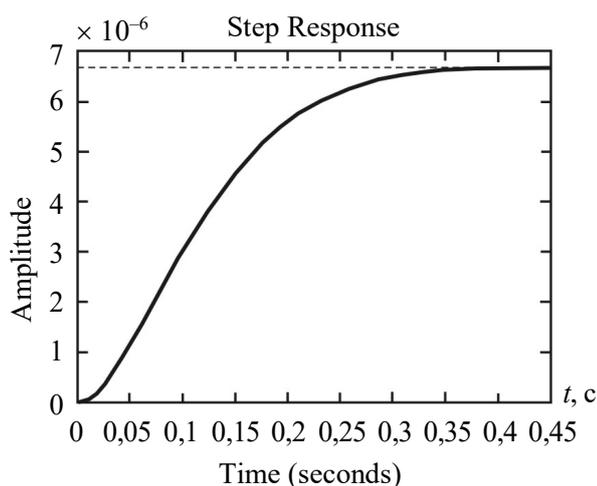
$$f_j(t) = \delta(t) = l'(t). \quad (2.30)$$

В соответствии с формулами (2.23) и (2.30) имеем

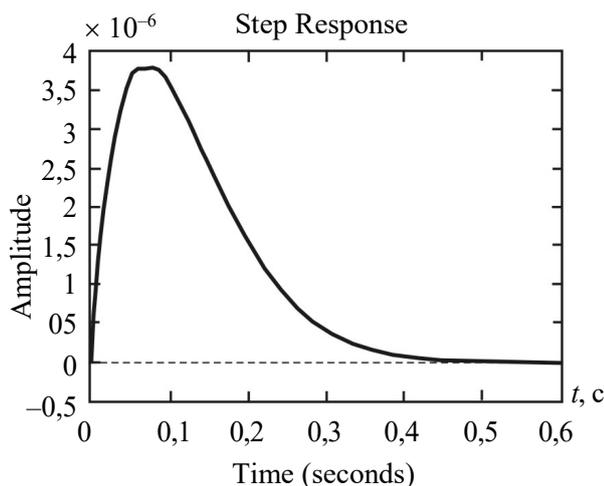
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 0 & \text{при } t > 0; \\ \infty & \text{при } t = 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

Таким образом, единичная импульсная функция представляет собой импульс бесконечно малой длительности и бесконечно большой амплитуды. Основное свойство единичной импульсной функции состоит в том, что интеграл от этой функции в бесконечных пределах равен единице

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.32)$$



*a*



*б*

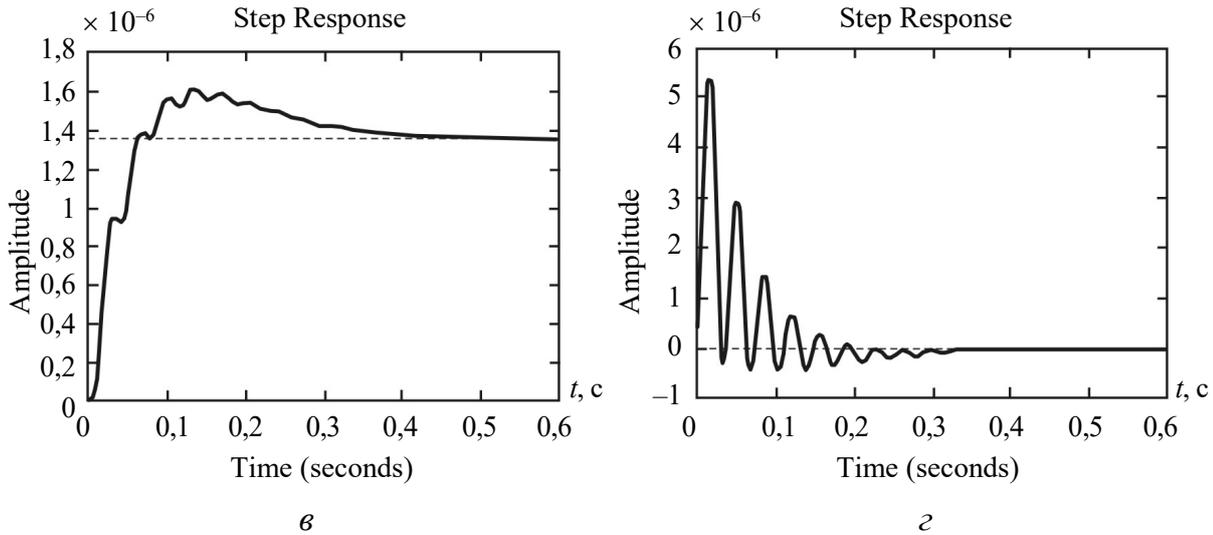


Рис. 2.3. Переходные функции замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки:

$$a - h_{11}(t); \quad б - h_{12}(t); \quad в - h_{21}(t); \quad z - h_{22}(t)$$

В реальных условиях получить идеальную функцию (2.31) невозможно, поэтому выбирают импульс конечной амплитуды  $A$  и длительности  $\Delta t$ . В этом случае условие (2.32) записывается

$$A \cdot \Delta t = 1, \quad (2.33)$$

а функция (2.31) может быть представлена в виде

$$\delta(t) = \lim_{\substack{A \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} A [1(t) - 1(t - \Delta t)]. \quad (2.34)$$

Подадим единичную импульсную функцию (2.34) на  $j$ -й вход динамической системы. Тогда на  $i$ -м выходе будем иметь

$$\omega_{ij}(t) = \lim_{\substack{A \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} A [h_{ij}(t) - h_{ij}(t - \Delta t)]. \quad (2.35)$$

Умножим и разделим правую часть (2.35) на  $\Delta t$ . Тогда с учетом соотношения (2.33) получаем

$$\omega_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h_{ij}(t) - h_{ij}(t - \Delta t)}{\Delta t} = h'_{ij}(t). \quad (2.36)$$

Таким образом, импульсная переходная функция динамической системы представляет собой производную по времени от соответствующей переходной функции системы.

Подадим на  $j$ -й вход динамической системы единичную импульсную функцию (2.30). Учитывая [21], что преобразование Лапласа от единичной импульсной функции равно  $L\{\delta(t)\} = 1$ , а также с учетом формулы (2.1), запишем

$$L\{\omega_{ij}(t)\} = W_{ij}(s). \quad (2.37)$$

Применим к обеим частям соотношения (2.37) операцию обратного преобразования Лапласа

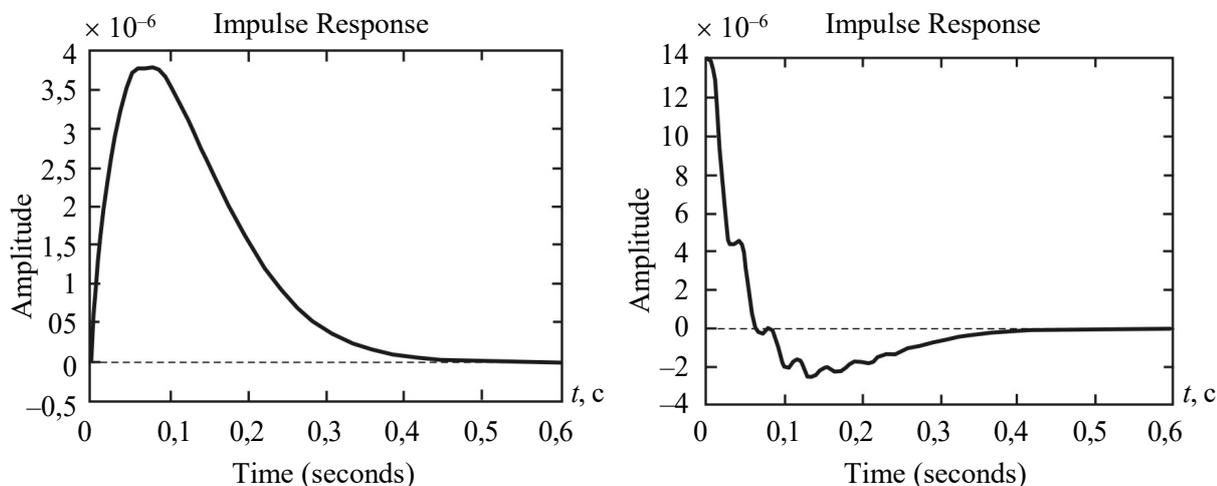
$$\omega_{ij}(t) = L^{-1}\{W_{ij}(s)\}, \quad (i, j = \overline{1, n}). \quad (2.38)$$

Из (2.38) следует, что импульсные переходные функции динамической системы представляют собой обратное преобразование Лапласа от соответствующей передаточной функции.

Импульсные переходные функции (2.38) образуют матричную импульсную переходную функцию

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} \omega_{11}(t) & \omega_{12}(t) & \dots & \omega_{1n}(t) \\ \omega_{21}(t) & \omega_{22}(t) & \dots & \omega_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n1}(t) & \omega_{n2}(t) & \dots & \omega_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

На рис. 2.4 приведены импульсные переходные функции замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки, построенные с помощью пакета «Simulink».



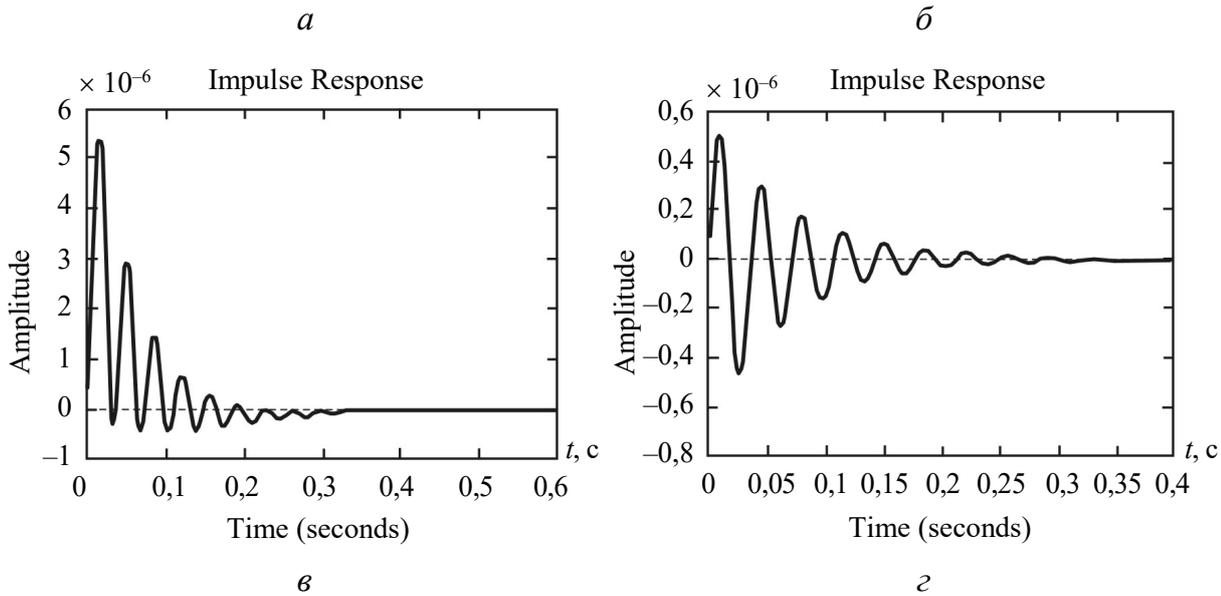


Рис. 2.4. Импульсные переходные функции замкнутых систем наведения и стабилизации танковой пушки:

$$a - \omega_{11}(t); \quad б - \omega_{12}(t); \quad в - \omega_{21}(t); \quad г - \omega_{22}(t)$$

Соотношение (2.1) запишем в виде

$$L\{x_i(t)\} = W_{ij}(s)L\{f_j(t)\}. \quad (2.39)$$

Используя формулу свертки [21], в соотношении (2.39) перейдем от изображений по Лапласу к оригиналам

$$x_i(t) = \int_0^t \omega_{ij}(\tau) f_j(t - \tau) d\tau. \quad (2.40)$$

Формула (2.40) называется интегралом Дюамеля.

### 2.3. Частотные характеристики линейных динамических систем

Динамические процессы в сложных технических объектах большей частью носят колебательный характер с различными частотами колебаний. Для оценки частотных свойств динамических систем используют их частотные характеристики – амплитудно-частотную (АЧХ) фазо-частотную (ФЧХ) и амплитудно-фазо-частотную (АФЧХ).

На  $j$ -й вход линий динамической системы подадим гармонический сигнал

$$f_j(t) = X_j \cos \omega t, \quad (2.41)$$

где  $X$  и  $\omega$  – соответственно амплитуда и частота входного сигнала.

На  $i$ -м выходе динамической системы в установившемся режиме также имеет место гармонический сигнал, сдвинутый по фазе относительно входного сигнала на угол  $\psi(\omega)$

$$x_i(t) = Y(\omega) \cos[\omega t + \psi_{ij}(\omega)]. \quad (2.42)$$

Воспользовавшись тождеством Эйлера

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}),$$

входной и выходной сигналы (2.41) и (2.42) представим в виде

$$f_j(t) = \frac{X_j}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}); \quad (2.43)$$

$$x_i(t) = \frac{Y(\omega)}{2} [e^{j[\omega t + \psi_{ij}(\omega)]} + e^{-j[\omega t + \psi_{ij}(\omega)]}]. \quad (2.44)$$

В соответствии с принципом суперпозиции для линейных динамических систем каждому слагаемому входного сигнала (2.43) соответствует слагаемое выходного сигнала (2.44). Тогда входной и выходной сигналы динамического звена могут быть записаны

$$f_j(t) = X_j e^{j\omega t}; \quad x_i(t) = Y_i(\omega) e^{j[\omega t + \psi_{ij}(\omega)]}. \quad (2.45)$$

К обеим частям соотношений (2.45) применим операцию преобразования Лапласа

$$L\{f_j(t)\} = X_j L\{e^{j\omega t}\}; \quad (2.46)$$

$$L\{x_i(t)\} = Y_i(\omega) e^{j\psi_{ij}(\omega)} L\{e^{j\omega t}\}. \quad (2.47)$$

Введем замену  $s = j\omega$ . Тогда с учетом формулы (2.1) и соотношений (2.46) и (2.47) запишем

$$W_{ij}(j\omega) = \frac{Y_i(\omega)}{X_j} e^{j\psi_{ij}(\omega)} = M_{ij}(\omega) e^{j\psi_{ij}(\omega)}. \quad (2.48)$$

Соотношение (2.48) назовем частотной передаточной функцией динамической системы по  $i$ -му выходу относительно  $j$ -го входа. Частотная передаточная функция может быть получена из обычной передаточной функции при подстановке в нее  $s = j\omega$  и представляет собой комплексную величину, модуль которой  $M_{ij}(\omega)$  равняется отношению амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного сигнала при заданной частоте входного сигнала, а аргумент  $\psi_{ij}(\omega)$  представляет собой фазовый сдвиг выходного сигнала относительно входного.

Частотная передаточная функция может быть представлена в полярной форме соотношением (2.48) и в координатной форме

$$W_{ij}(j\omega) = U_{ij}(\omega) + jV_{ij}(\omega), \quad (2.49)$$

где  $U_{ij}(\omega)$  – действительная часть частотной передаточной функции;  $V_{ij}(\omega)$  – мнимая часть частотной передаточной функции. Связь между полярной и координатной формами записи частотной передаточной функции поясняется рис. 2.5.

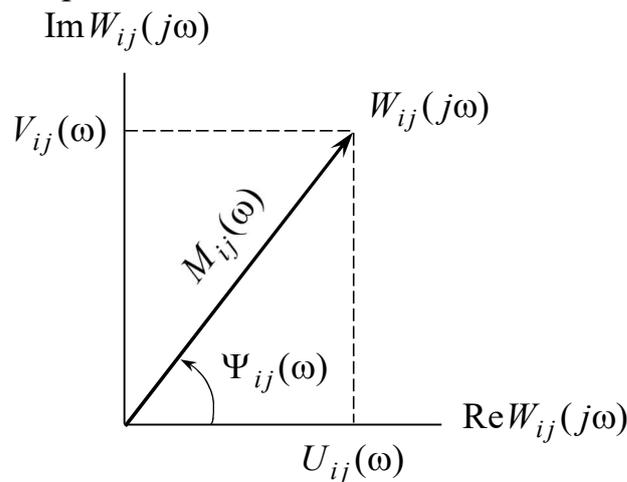


Рис. 2.5. К представлению частотной передаточной функции в полярной и координатной формах

Из рассмотрения рис. 2.5. можно записать соотношения

$$M_{ij}(\omega) = \sqrt{U_{ij}^2(\omega) + V_{ij}^2(\omega)}; \quad (2.50)$$

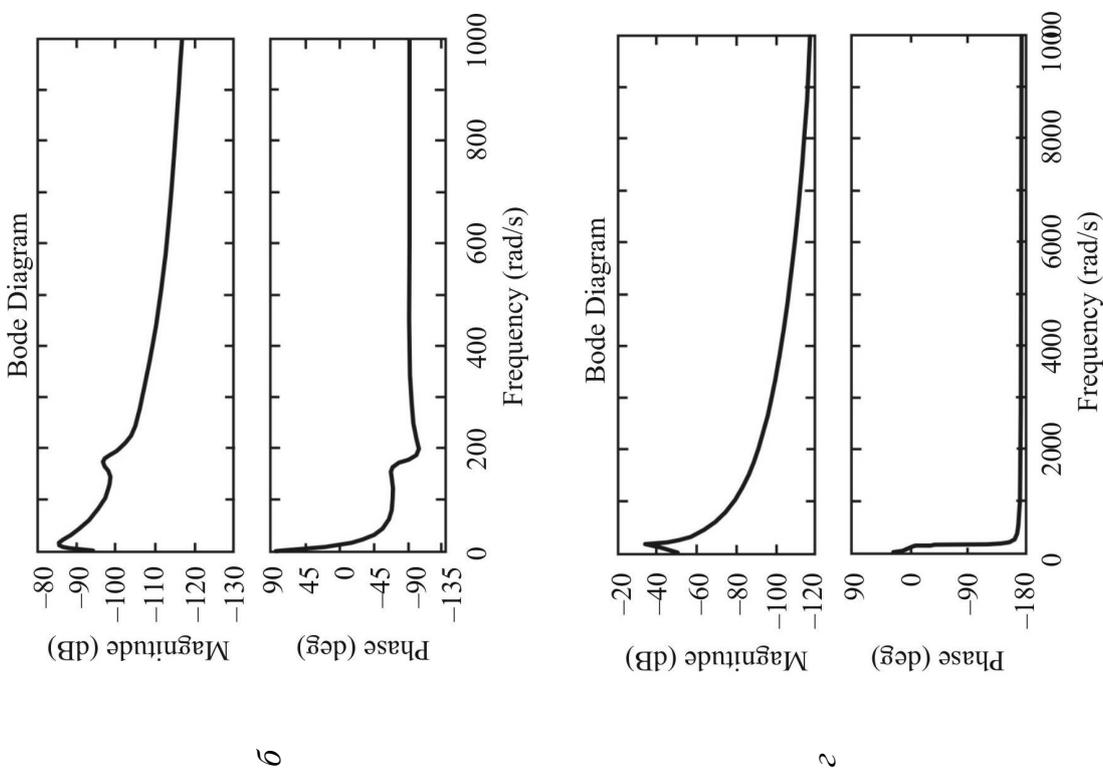
$$\Psi_{ij}(\omega) = \arctg \frac{V_{ij}(\omega)}{U_{ij}(\omega)}. \quad (2.51)$$

Амплитудно-частотная характеристика динамической системы определяется соотношением (2.50), а ее фазо-частотная характеристика – соотношением (2.51).

Амплитудно-фазо-частотная характеристика динамической системы строится с помощью соотношения (2.49) в координатах  $U_{ij}(\omega)$ ,  $V_{ij}(\omega)$  при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности.

АЧХ, ФЧХ и АФЧХ динамической системы наглядно показывает качество пропускания динамической системой периодических сигналов.

На рис. 2.6 приведены амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки, построенные с помощью пакета «Simulink», а на рис. 2.7 – амплитудно-фазо-частотные характеристики той же системы, построенные при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .



Амплитудно-фазо-частотные характеристики замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки: а –  $W_{11}(j\omega)$ ; б –  $W_{12}(j\omega)$ ; в –  $W_{21}(j\omega)$ ; г –  $W_{22}(j\omega)$

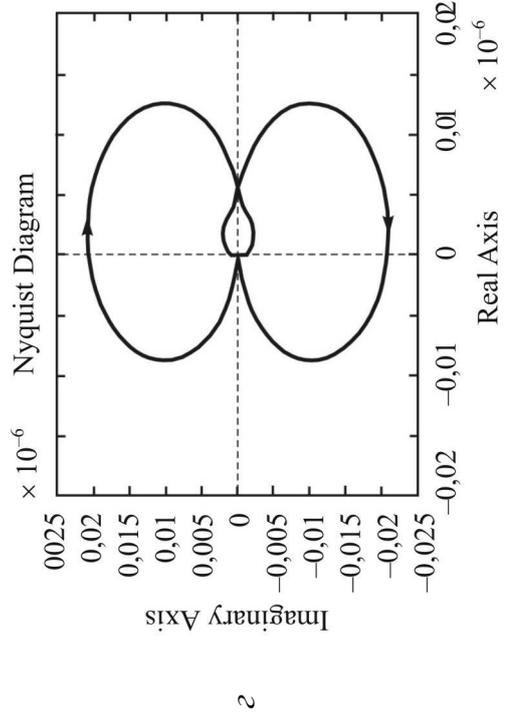
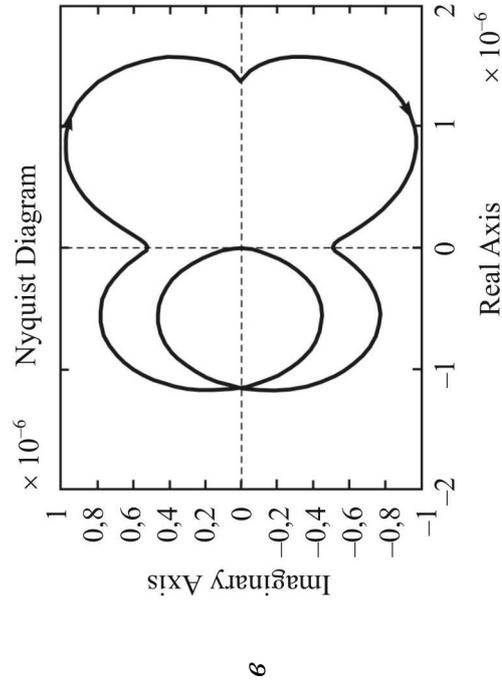
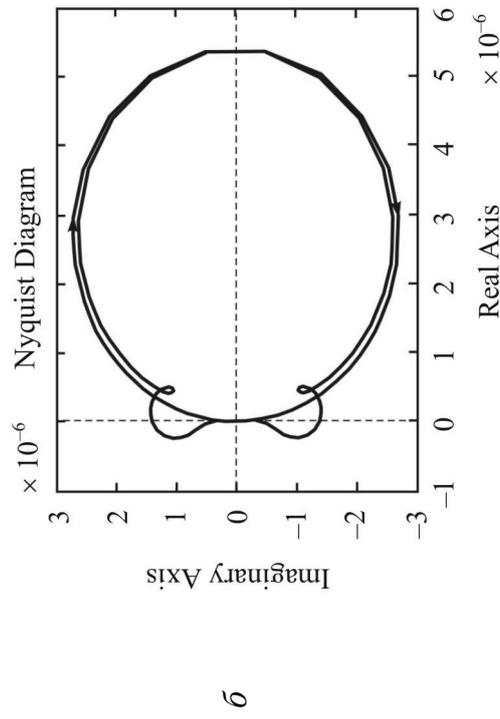
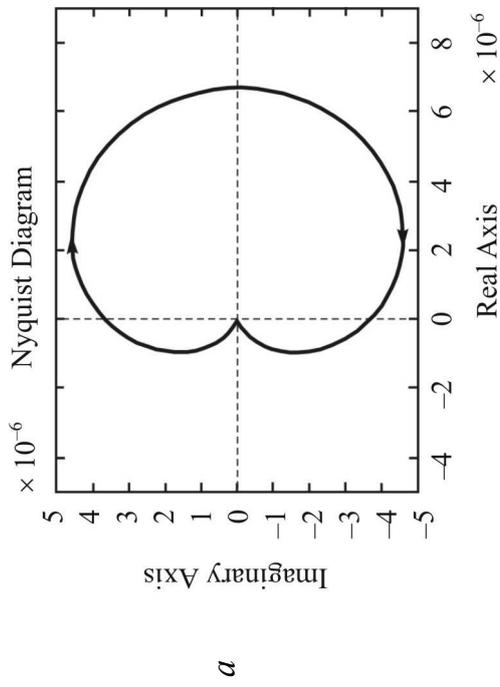


Рис. 2.7. Амплитудно-фазо-частотные характеристики замкнутой системы наведения стабилизации танковой пушки:  
*a* –  $W_{11}(j\omega)$ ; *б* –  $W_{12}(j\omega)$ ; *в* –  $W_{21}(j\omega)$ ; *г* –  $W_{22}(j\omega)$

## 2.4. Устойчивость линейных динамических систем

Под устойчивостью будем понимать свойство динамической системы возвращаться в исходный установившийся режим после выхода из него в результате какого-либо внешнего воздействия.

Установившийся режим динамической системы характеризуется нулевыми значениями компонент вектора состояния

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0. \quad (2.52)$$

В пространстве состояний установившемуся режиму соответствует нулевое положение изображающей точки, иными словами, положение изображающей точки в начале координат. Отличные от нуля значения компонент вектора состояния определяют отклонения изображающей точки от нулевого положения установившегося равновесия или так называемые возмущения равновесного состояния системы. Получив некоторое начальное возмущение

$$X_0 = [x_1(0) \quad x_2(0) \quad \dots \quad x_n(0)]^T$$

и предоставленная затем самой себе, система будет совершать движение, которое мы назовем возмущенным движением. Ему отвечает некоторое возмущенное движение изображающей точки в пространстве состояний.

В возмущенном движении динамическая система или удаляется от равновесного состояния, или пребывает в ближайшей окрестности равновесного состояния, или, наконец, возвращается в равновесное состояние. Это поведение динамической системы в возмущенном движении и будет характеризовать устойчивость или неустойчивость невозмущенного равновесного состояния. С этой точки зрения естественно считать устойчивым равновесное состояние, в ближайшей окрестности которого пребывает система во все время возмущенного движения, или в которое она возвращается, получив некоторое начальное возмущение.

Будем считать равновесное состояние динамической системы, определяемое нулевыми значениями компонент вектора состояния (2.52), устойчивым по Ляпунову или просто устойчивым, если для любого сколь угодно малого положительного числа  $\xi > 0$  можно указать такое положи-

тельное число  $\eta(\xi) > 0$ , зависящее от  $\xi$ , что во время возмущенного движения системы удовлетворяется неравенство

$$\rho[X(t)] \leq \xi, \quad (2.53)$$

когда скоро норма вектора состояния в начальный момент времени  $t = 0$  выбрана согласно условию

$$\rho[X(0)] \leq \eta(\xi). \quad (2.54)$$

На рис. 2.8 представлены возможные процессы изменения во времени нормы вектора состояния динамической системы.

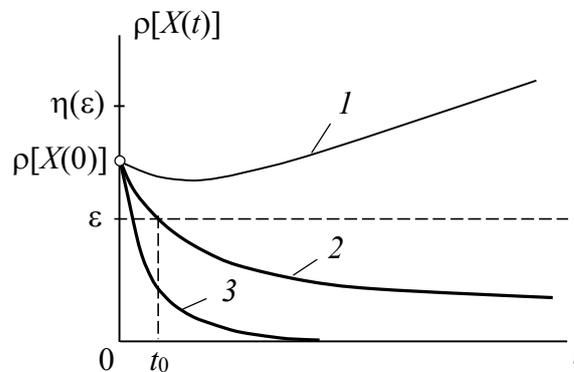


Рис. 2.8. К определению устойчивости динамической системы

Кривая 1 на рис. 2.9 соответствует неустойчивой динамической системе, а кривая 2, удовлетворяющая при  $t \geq t_0$  неравенству (2.53), соответствует устойчивой динамической системе. Если выполняется соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho[X(t)] = 0, \quad (2.55)$$

то такая динамическая система называется асимптотически устойчивой (кривая 3) [22].

Устойчивость является внутренним свойством динамической системы и не зависит от внешних возмущений, действующих на систему. Общее решение динамической системы (1.2) записывается в виде [23]

$$X(t) = X_{\text{пер}}(t) + X_{\text{уст}}(t), \quad (2.56)$$

где  $X_{\text{уст}}(t)$  – установившаяся составляющая, представляющая собой частное решение уравнения (1.2);  $X_{\text{пер}}(t)$  – переходная составляющая, представляющая собой общее решение однородного дифференциального уравнения

$$\dot{X}(t) = \Phi[X(t), \alpha], \quad (2.57)$$

Дифференциальное уравнение (2.57) описывает собственное возмущенное движение динамической системы без учета внешнего возмущения  $F(t)$ , т. е. движение системы, получившей в момент  $t = 0$  внешнее возмущение  $X(0)$  и далее предоставленной самой себе. Динамическая система является устойчивой, если переходная составляющая решения уравнения (1.2) удовлетворяет условию (2.53), и асимптотически устойчивой, если переходная составляющая удовлетворяет условию (2.55).

Математическую модель системы первого приближения, соответствующей нелинейной системе (2.57), запишем в виде

$$\dot{X}(t) = A(\alpha)X(t). \quad (2.58)$$

Характеристическое уравнение системы первого приближения (2.58) записывается

$$R(s) = \det[A(\alpha) - Es] = r_0 s^n + r_1 s^{n-1} + \dots + r_{n-1} s + r_n = 0. \quad (2.59)$$

Корни характеристического уравнения (2.59) обозначим через  $s_1, s_2, \dots, s_n$ . Тогда решение дифференциального уравнения (2.58) записывается в виде [24]

$$X_i(t) = c_{i1} e^{s_1 t} + c_{i2} e^{s_2 t} + \dots + c_{in} e^{s_n t}; \quad (i = \overline{1, n}), \quad (2.60)$$

где  $c_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) – произвольные постоянные, определяемые начальными условиями.

Пусть  $k$ -й корень характеристического уравнения действительный положительный

$$s_k = +\alpha_k.$$

Тогда слагаемые в решениях (2.60), соответствующие этому корню, равны

$$c_{ik} e^{\alpha_k t}, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (2.61)$$

С течением времени слагаемые (2.61) неограниченно возрастают и, следовательно, неограниченно возрастает норма вектора состояния  $\rho[X(t)]$ .

Если  $k$ -й корень характеристического уравнения (2.59) действительный отрицательный

$$s_k = -\alpha_k,$$

то слагаемые в решениях (2.60), соответствующие этому корню, равны

$$c_{ik} e^{-\alpha_k t}, \quad (i = \overline{1, n})$$

и неограниченно убывают с течением времени.

Если же  $k$ -й корень характеристического уравнения (2.59) действительный нулевой

$$s_k = 0,$$

то слагаемые в решениях (2.60), соответствующие этому корню, равны

$$c_{ik} e^{0t} = c_{ik}.$$

С течением времени эти слагаемые не возрастают и не убывают, а остаются постоянными. В этом случае говорят, что динамическая система находится на границе устойчивости.

Пусть  $k$  и  $k+1$  корни характеристического уравнения (2.59) комплексно-сопряженные с положительной действительной частью

$$s_{k,k+1} = \alpha_k \pm j\beta_k.$$

Слагаемые в решениях (2.60), соответствующие этим корням, равны

$$c_{ik} e^{(\alpha_k + j\beta_k)t} + c_{i,k+1} e^{(\alpha_k - j\beta_k)t} = A_k e^{\alpha_k t} \sin \beta_k t.$$

Эти слагаемые с течением времени неограниченно возрастают, что свидетельствует о неограниченном возрастании нормы вектора состояния.

Если  $k$  и  $k+1$  корни характеристического уравнения (2.59) комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью

$$s_{k,k+1} = -\alpha_k \pm j\beta_k,$$

то

$$c_k e^{(-\alpha_k + j\beta_k)t} + c_{k+1} e^{(-\alpha_k - j\beta_k)t} = A_k e^{-\alpha_k t} \sin \beta_k t.$$

Эти слагаемые с течением времени неограниченно затухают.

Если же  $k$  и  $k+1$  корни уравнения (2.59) являются чисто мнимыми

$$s_{k,k+1} = \pm j\beta_k,$$

то слагаемые в решениях (2.60), соответствующие этим корням, равны

$$c_k e^{j\beta_k t} + c_{k+1} e^{-j\beta_k t} = A_k \sin \beta_k t.$$

Эти слагаемые не возрастают и не убывают неограниченно, поэтому система находится на границе устойчивости.

Резюмируя изложенное, можно сделать следующие выводы:

- если все корни характеристического уравнения (2.59) системы (2.58) имеют отрицательные действительные части, то такая система является устойчивой;
- если среди корней характеристического уравнения (2.59) системы (2.58) имеется хотя бы один корень с положительной действительной частью, то такая система является неустойчивой;
- если характеристическое уравнение (2.59) системы (2.60), не имея корней с положительной действительной частью, имеет нулевой действительный корень или пару чисто мнимых корней, то такая система является нейтральной или находящейся на границе устойчивости.

## **2.5. Устойчивость нелинейных динамических систем по первому приближению. Критерии устойчивости**

Если вектор-функция  $\Phi[X(t), \alpha]$  правой части математической модели (2.57) динамической системы является аналитической, компоненты которой допускают разложения в ряды Тейлора относительно состояния установившегося равновесия, то исследование устойчивости этого состояния используют теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [25].

**Теорема 1.** Если все корни характеристического уравнения (2.59) системы первого приближения (2.58) имеют отрицательные дей-

ствительные части, то состояние установившегося равновесия исходной нелинейной системы (2.57) является устойчивым, каковы бы ни были нелинейные члены разложения, отбрасываемые при составлении системы первого приближения.

**Т е о р е м а 2.** Если среди корней характеристического уравнения (2.59) системы первого приближения (2.58) имеется хотя бы один корень с положительной действительной частью, то состояние установившегося равновесия исходной нелинейной системы (2.57) неустойчиво, каковы бы ни были нелинейные члены разложения в ряды Тейлора, отбрасываемые при составлении системы первого приближения.

**Т е о р е м а 3.** Если характеристическое уравнение (2.59) системы первого приближения (2.58), не имея корней с положительной действительной частью, имеет хотя бы один корень с нулевой действительной частью, то невозможно сделать заключение об устойчивости состояния установившегося равновесия исходной нелинейной системы (2.57) по модели первого приближения (2.58).

В последнем случае, а также в случае неаналитичности вектор-функции  $\Phi[X(t), \alpha]$ , для установления устойчивости равновесного состояния нелинейной системы (2.57) используются теоремы второго или прямого метода Ляпунова [25].

Рассмотрим комплексную плоскость корней характеристического уравнения (2.59) системы первого приближения (2.58). Для устойчивости системы (2.58), а, следовательно, и системы (2.57), необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (2.59) располагались слева от мнимой оси плоскости корней. Таким образом, мнимая ось плоскости корней характеристического уравнения является границей области устойчивости, а собственно областью устойчивости является вся левая полуплоскость плоскости корней (рис. 2.9).

Отыскание корней характеристического уравнения (2.59) требует наличия вычислительной техники и соответствующих пакетов программных продуктов. В этой связи широкое распространение получили косвенные признаки оценки устойчивости

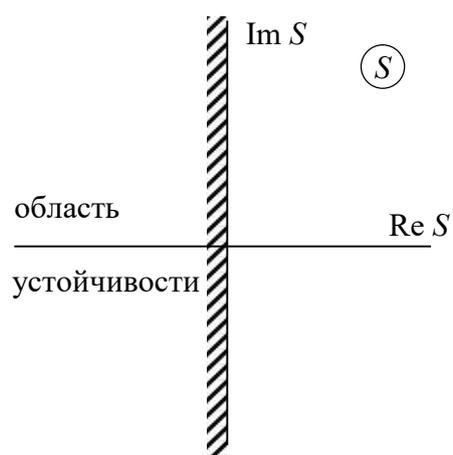


Рис. 2.9. Комплексная плоскость корней характеристического уравнения

динамических систем, называемые критериями устойчивости.

Все известные критерии устойчивости линейных динамических систем подразделяются на алгебраические и частотные. Из алгебраических критериев устойчивости наиболее распространенным является критерий устойчивости Рауса–Гурвица.

Из коэффициентов характеристического уравнения (2.59) составим квадратную матрицу размером  $n \times n$ , называемую матрицей Гурвица, по следующему правилу.

В первую строку матрицы Гурвица заносятся коэффициенты уравнения (2.59) с нечетными индексами, а недостающие элементы первой строки дополняются нулями. Во вторую строку матрицы заносятся коэффициенты уравнения (2.59) с четными индексами, а недостающие элементы также дополняются нулями. Третья строка матрицы Гурвица представляет собой первую строку, сдвинутую на один элемент вправо, а четвертая строка представляет собой вторую строку также сдвинутую на один элемент вправо. При соблюдении этого правила построения матрицы Гурвица последним элементом последней строки является коэффициент  $r_n$  характеристического уравнения (2.59).

В соответствии с изложенным, матрицу Гурвица запишем в виде

$$\Gamma = \begin{bmatrix} r_1 & r_3 & r_5 & \dots & 0 \\ r_0 & r_2 & r_4 & \dots & 0 \\ 0 & r_1 & r_3 & \dots & 0 \\ 0 & r_0 & r_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_n \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Критерий Рауса–Гурвица формируется следующим образом: для устойчивости динамической системы с характеристическим уравнением (2.59) необходимо и достаточно, чтобы были положительны  $n$  определителей Гурвица, представляющих собой главные диагональные миноры матрицы Гурвица (2.62)

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= r_1 > 0; \\
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} r_1 & r_3 \\ r_0 & r_2 \end{vmatrix} > 0; \\
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} r_1 & r_3 & r_5 \\ r_0 & r_2 & r_4 \\ 0 & r_1 & r_3 \end{vmatrix} > 0; \\
&\dots\dots\dots \\
\Delta_n &= \det \Gamma > 0.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Запишем характеристическое уравнение замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки (2.22) в нормальной форме по убывающим степеням  $S$

$$I_n I_k s^4 + I_n f s^3 + I_n c s^2 + k_y k_c k_{\dot{\varphi}} s + k_y k_{\Gamma} k_{\varphi} = 0. \tag{2.64}$$

Для характеристического уравнения (2.64) четвертого порядка матрица Гурвица размером  $4 \times 4$  записывается в виде

$$\Gamma = \begin{bmatrix} I_n f & k_y k_c k_{\dot{\varphi}} & 0 & 0 \\ I_n I_k & I_n c & k_y k_{\Gamma} k_{\varphi} & 0 \\ 0 & I_n f & k_y k_c k_{\dot{\varphi}} & 0 \\ 0 & I_n I_k & I_n c & k_y k_{\Gamma} k_{\varphi} \end{bmatrix}. \tag{2.65}$$

Запишем соотношения для определителей Гурвица

$$\Delta_1 = I_n f; \tag{2.66}$$

$$\Delta_2 = I_n^2 f c - I_n I_k k_y k_c k_{\dot{\varphi}}; \tag{2.67}$$

$$\Delta_3 = I_n^2 f c k_y k_c k_{\dot{\varphi}} - I_n I_k k_y^2 k_c^2 k_{\dot{\varphi}}^2 - I_n^2 f^2 k_y k_{\Gamma} k_{\varphi}; \tag{2.68}$$

$$\Delta_4 = k_y k_{\Gamma} k_{\varphi} \Delta_3. \tag{2.69}$$

Определитель Гурвица (2.66) всегда положителен. Если определители (2.67) и (2.68) положительны, то при  $k_{\varphi} > 0$  положителен и определитель

тель (2.69), следовательно, необходимым и достаточным условием устойчивости рассматриваемой динамической системы является положительность определителей Гурвица (2.67) и (2.68). Из этого условия следуют неравенства:

$$k_{\phi} < \frac{I_n f c}{I_k k_y k_c}; \quad (2.70)$$

$$k_{\phi} < \frac{I_n f c k_c k_{\phi} - I_k k_y k_c^2 k_{\phi}^2}{I_n f^2 k_{\Gamma}}. \quad (2.71)$$

Из частотных критериев устойчивости наибольшее распространение получил критерий Михайлова. Характеристический полином динамической системы представим в виде

$$R(s) = r_0 s^n + r_1 s^{n-1} + r_2 s^{n-2} + \dots + r_{n-1} s + r_n. \quad (2.72)$$

В соотношении (2.72) произведем замену  $s = j\omega$ . В результате получим соотношение для характеристического вектора

$$R(j\omega) = r_0 (j\omega)^n + r_1 (j\omega)^{n-1} + r_2 (j\omega)^{n-2} + \dots + r_{n-1} \omega + r_n. \quad (2.73)$$

В характеристическом векторе (2.73) выделим действительную и мнимую части

$$R(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega), \quad (2.74)$$

причем

$$X(\omega) = r_n - r_{n-2} \omega^2 + r_{n-4} \omega^4 - \dots \quad (2.75)$$

$$Y(\omega) = r_{n-1} \omega + r_{n-3} \omega^3 + r_{n-5} \omega^5 - \dots \quad (2.76)$$

В комплексной плоскости  $(X, Y)$  конец характеристического вектора  $R(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности описывает кривую, называемую годографом характеристического вектора.

Критерий Михайлова формулируется следующим образом. Для устойчивости динамической системы с характеристическим вектором

(2.73) необходимо и достаточно, чтобы годограф характеристического вектора проходил последовательно через  $n$  квадрантов комплексной плоскости  $(X, Y)$  и уходил в бесконечность в  $n$ -м квадранте.

Рассмотрим характеристический полином замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки

$$R(s) = I_n I_k s^4 + I_n f s^3 + I_n c s^2 + k_y k_c k_\phi s + k_y k_r k_\phi. \quad (2.77)$$

В (2.77) осуществим замену  $s = j\omega$ . В результате имеем

$$R(j\omega) = I_n I_k \omega^4 - j I_n f \omega^3 - I_n c \omega^2 + j k_y k_c k_\phi \omega + k_y k_r k_\phi. \quad (2.78)$$

В соотношении для характеристического вектора выделим действительную и мнимую части:

$$X(\omega) = k_y k_r k_\phi - I_n c \omega^2 + I_n I_k \omega^4; \quad (2.79)$$

$$Y(\omega) = j k_y k_c k_\phi \omega - I_n f \omega^3. \quad (2.80)$$

Используя формулы (2.79) и (2.80), построим в комплексной плоскости  $(X, Y)$  годограф характеристического вектора (2.78), возможные варианты которого представлены на рис. 2.10.

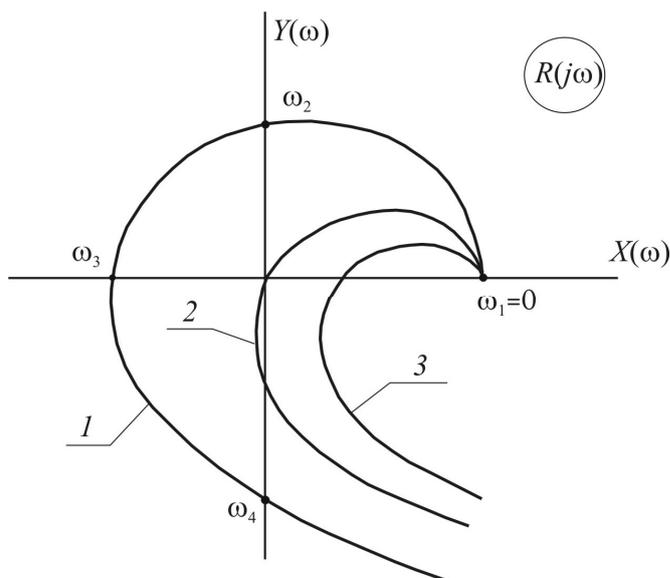


Рис. 2.10. Возможные варианты годографа характеристического вектора

Вариант 1 соответствует устойчивой системе, вариант 2 – нейтральной, а вариант 3 – неустойчивой системе. Для устойчивой системы значения частот, соответствующих точкам пересечения годографа с осями  $X(\omega)$   $Y(\omega)$ , удовлетворяют неравенствам

$$\omega_2 < \omega_3; \quad \omega_3 < \omega_4; \quad (2.81)$$

Отыщем значения частот  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  и  $\omega_4$ . Для отыскания частот  $\omega_2$  и  $\omega_4$  приравняем нулю правую часть соотношения (2.79). В результате получим биквадратное уравнение

$$I_n I_k \omega^4 - I_n c \omega^2 + k_y k_\Gamma k_\Phi = 0,$$

корни которого равны

$$\omega_{2,4}^2 = \frac{c}{2I_k} \pm \sqrt{\frac{c}{4I_k^2} - \frac{k_y k_\Gamma k_\Phi}{I_n I_k}}. \quad (2.82)$$

Для отыскания частоты  $\omega_3$  приравняем нулю правую часть соотношения (2.80). В результате получаем

$$\omega_3^2 = \frac{k_y k_c k_\Phi}{I_n f}. \quad (2.83)$$

Используя формулы (2.82) и (2.83), условия устойчивости (2.81) запишем в виде

$$\frac{c}{2I_k} - \sqrt{\frac{c}{4I_k^2} - \frac{k_y k_\Gamma k_\Phi}{I_n I_k}} < \frac{k_y k_c k_\Phi}{I_n f}; \quad (2.84)$$

$$\frac{k_y k_c k_\Phi}{I_n f} < \frac{c}{2I_k} + \sqrt{\frac{c}{4I_k^2} - \frac{k_y k_\Gamma k_\Phi}{I_n I_k}}. \quad (2.85)$$

К условиям (2.84) и (2.85) следует условие положительности выражения под квадратным корнем

$$\frac{k_y k_\Gamma k_\varphi}{I_n} < \frac{c^2}{4I_k}. \quad (2.86)$$

Неравенства (2.84)–(2.86) в совокупности определяют требования к варьируемым параметрам  $k_\varphi$  и  $k_{\dot{\varphi}}$ .

## 2.6. Построение границы области устойчивости и линий равной степени устойчивости динамической системы

Соотношения (2.70), (2.71), а также (2.84)–(2.86), полученные с помощью критериев Рауса–Гурвица и Михайлова могут быть использованы при выборе численных значений варьируемых параметров системы наведения и стабилизации танковой пушки. Вместе с тем, эти неравенства лишь помогают ответить на вопрос - устойчива или нет рассматриваемая динамическая система при выбранных значениях варьируемых параметров, но не указывают пути выбора этих параметров. Для целенаправленного выбора параметров, обеспечивающих устойчивость динамической системы, обычно строят область устойчивости в плоскости двух варьируемых параметров системы.

Обозначим через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  варьируемые параметры динамической системы. Тогда характеристическое уравнение такой системы в общем виде записывается

$$R(s, \alpha_1, \alpha_2) = 0. \quad (2.87)$$

В уравнении (2.87) произведем замену  $s = j\omega$  и выделим в полученном соотношении действительную и мнимую части

$$R(j\omega, \alpha_1, \alpha_2) = X(\omega, \alpha_1, \alpha_2) + jY(\omega, \alpha_1, \alpha_2) = 0. \quad (2.88)$$

Комплексная величина равна нулю в случае, если равны нулю её действительная и мнимая части, следовательно, из (2.88) следует

$$X(\omega, \alpha_1, \alpha_2); \quad (2.89)$$

$$Y(\omega, \alpha_1, \alpha_2) = 0. \quad (2.90)$$

Соотношения (2.89) и (2.90) будем рассматривать как систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Решения этой системы запишем в виде

$$\alpha_1 = \alpha_1(\omega); \quad \alpha_2 = \alpha_2(\omega). \quad (2.91)$$

Изменяя величину  $\omega$  от нуля до бесконечности, построим в плоскости варьируемых параметров  $(\alpha_1, \alpha_2)$  границу области устойчивости динамической системы. Для выделения области устойчивости воспользуемся правилом штриховки [26].

Рассмотрим определитель, составленный из частных производных

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial X(\omega, \alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial X(\omega, \alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial Y(\omega, \alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Y(\omega, \alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} \end{vmatrix}. \quad (2.92)$$

Правило штриховки заключается в следующем. Если перемещаться вдоль границы области устойчивости в сторону возрастания  $\omega$  и одновременно вычислять значение определителя (2.92), то границу следует штриховать слева, если определитель (2.92) положителен, или справа, если определитель (2.92) отрицателен. При соблюдении этого правила штриховка направлена внутрь области устойчивости.

Построим область устойчивости системы наведения и стабилизации танковой пушки в плоскости варьируемых параметров  $(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}})$ . От соотношений (2.79) и (2.80) перейдем к уравнениям (2.89) и (2.90)

$$X(\omega, k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) = k_y k_\Gamma k_\varphi - I_n c \omega^2 + I_n I_k \omega^4 = 0; \quad (2.93)$$

$$Y(\omega, k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) = k_y k_c k_{\dot{\varphi}} \omega - I_n f \omega^3 = 0. \quad (2.94)$$

Из уравнений (2.93) и (2.94) получаем

$$k_\varphi = \frac{1}{k_y k_\Gamma} (I_n c - I_n I_k \omega^2) \omega^2; \quad (2.95)$$

$$k_{\dot{\varphi}} = \frac{1}{k_y k_c} I_n f \omega^2; \quad (2.96)$$

Используя соотношения (2.95) и (2.96), построим границу области устойчивости в плоскости варьируемых параметров  $(k_{\varphi}, k_{\dot{\varphi}})$  при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности (рис. 2.11).

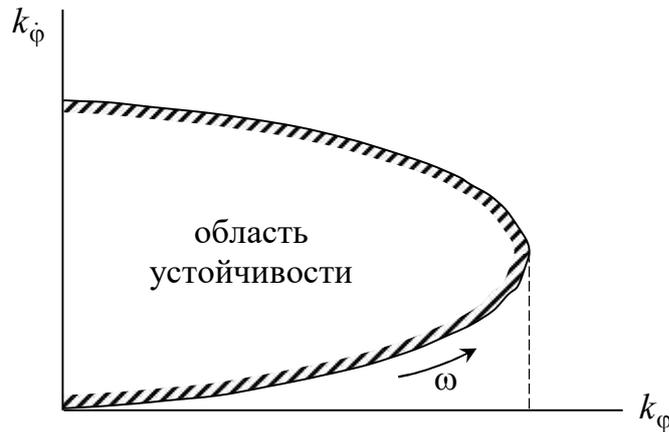


Рис. 2.11. Область устойчивости замкнутой системы наведения и стабилизации

Для выделения области устойчивости воспользуемся правилом штриховки, подставляя в определитель (2.92) соотношения (2.93) и (2.94)

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_y k_r & 0 \\ 0 & k_y k_c \omega \end{vmatrix} = k_y^2 k_r k_c \omega. \quad (2.97)$$

При положительных  $\omega$  определитель (2.97) положителен, следовательно, границу области устойчивости следует штриховать слева.

Граница области устойчивости динамической системы является отображением мнимой оси плоскости корней этой системы на плоскость  $(\alpha_1, \alpha_2)$ . В самом деле, если значения варьируемых параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  выбраны внутри области

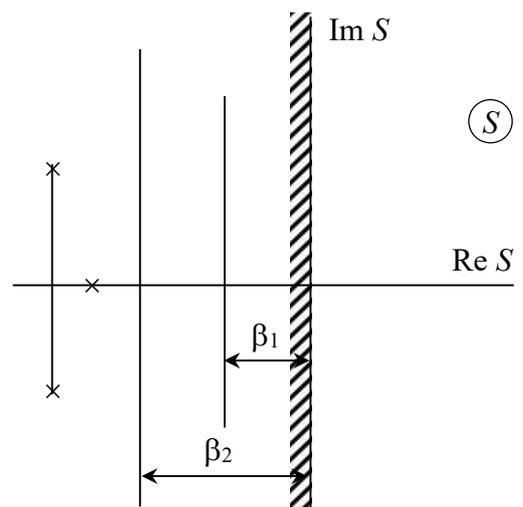


Рис. 2.12. К построению линий равной степени устойчивости

устойчивости, то это означает, что все корни характеристического уравнения системы находятся слева от мнимой оси плоскости корней, а если значения варьируемых параметров выбраны на границе области устойчивости, то это означает, что характеристическое уравнение системы содержит нулевой действительный корень или пару чисто мнимых корней.

В комплексной плоскости корней, представленной на рис. 2.12, проведем прямую линию параллельную мнимой оси и отстоящую от мнимой оси влево на расстояние  $\beta$ . Если все корни характеристического уравнения динамической системы находятся слева от этой линии, то это означает, что динамическая система имеет степень устойчивости не меньше  $\beta$  [27]. Будем передвигать линию влево, увеличивая расстояние  $\beta$ . Когда на этой линии окажется ближайший к линии оси действительный корень или ближайшая пара комплексно сопряженных корней характеристического уравнения системы, то расстояние  $\beta^*$  является степенью устойчивости динамической системы.

В характеристическом уравнении (2.59) произведем замену

$$s = \beta + j\omega. \quad (2.98)$$

В результате получаем

$$R(\beta + j\omega, \alpha_1, \alpha_2) = X(\beta, \omega, \alpha_1, \alpha_2) + jY(\beta, \omega, \alpha_1, \alpha_2) = 0. \quad (2.99)$$

При  $\beta = 0$  соотношение (2.99) вырождается в соотношение (2.88).

Комплексная величина равна нулю, если равны нулю ее действительная и мнимая части

$$X(\beta, \omega, \alpha_1, \alpha_2) = 0; \quad (2.100)$$

$$Y(\beta, \omega, \alpha_1, \alpha_2) = 0. \quad (2.101)$$

Разрешим уравнения (2.100) и (2.101) относительно варьируемых параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

$$\alpha_1 = \alpha_1(\beta, \omega); \quad (2.102)$$

$$\alpha_2 = \alpha_2(\beta, \omega).$$

При  $\beta = 0$  соотношения (2.102) при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности описывают в плоскости  $(\alpha_1, \alpha_2)$  границу области устойчивости. При  $\beta < 0$  соотношения (2.102) описывают в плоскости  $(\alpha_1, \alpha_2)$  линии равной степени устойчивости, при нахождении на которых рабочей точки системы ее степень устойчивости равна  $\beta$ . При некотором  $\beta = \beta^*$  область устойчивости динамической системы стягивается в линию или в точку, где степень устойчивости системы максимальна и равна  $\beta^*$ .

В характеристическом уравнении (2.64) произведем замену  $s = \beta + j\omega$ , выделим в полученном выражении действительную и мнимую части и приравняем их к нулю

$$I_n I_k (\beta^4 - 6\beta^2 \omega^2 + \omega^4) + I_n f (\beta^3 - 3\beta \omega^2) + I_n c (\beta^2 - \omega^2) + k_y k_c k_{\dot{\varphi}} \beta + k_y k_{\Gamma} k_{\varphi} = 0; \quad (2.103)$$

$$I_n I_k 4\beta (\beta^2 - \omega^2) + I_n f (3\beta^2 - \omega^2) + I_n c 2\beta + k_y k_c k_{\dot{\varphi}} = 0.$$

Разрешим систему алгебраических уравнений (2.103) относительно варьируемых параметров  $k_{\varphi}$  и  $k_{\dot{\varphi}}$ :

$$k_{\varphi} = \frac{1}{k_y k_{\Gamma}} (3I_n I_k \beta^4 + 2I_n I_k \beta^2 \omega^2 - I_n I_k \omega^4 + 2I_n f \beta^3 + 2I_n f \beta \omega^2 + I_n c \beta^2 + I_n c \omega^2); \quad (2.104)$$

$$k_{\dot{\varphi}} = \frac{1}{k_y k_{\Gamma}} (-4I_n I_k \beta^3 + 4I_n I_k \beta \omega^2 - 3I_n f \beta^2 + I_n f \omega^2 - 2I_n c \beta). \quad (2.105)$$

При  $\beta = 0$  соотношения (2.104) и (2.105) вырождаются в соотношения (2.45) и (2.96). На рис. 2.13 приведены кривые, построенные с помощью соотношений (2.104) и (2.105) при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности и при различных значениях  $\beta < 0$ . При некотором  $\beta < 0$  линии равной степени устойчивости стягиваются в прямую линии параллельную оси абсцисс и отстоящую от нее на расстоянии  $k_{\dot{\varphi}}^* = 50$ . При нахож-

дении рабочей точки системы на этой прямой система обладает максимальной степенью устойчивости.

Для отыскания величины максимальной степени устойчивости  $\beta^*$  следует учесть, что при нахождении рабочей точки системы на прямой максимальной степени устойчивости величина  $k_{\phi}^*$  не изменяется при изменении  $\omega$ . Приравняем нулю члены, содержащие  $\omega^2$  в правой части соотношения (2.105)

$$4I_n I_k \beta^* \omega^2 + I_n f \omega^2 = 0.$$

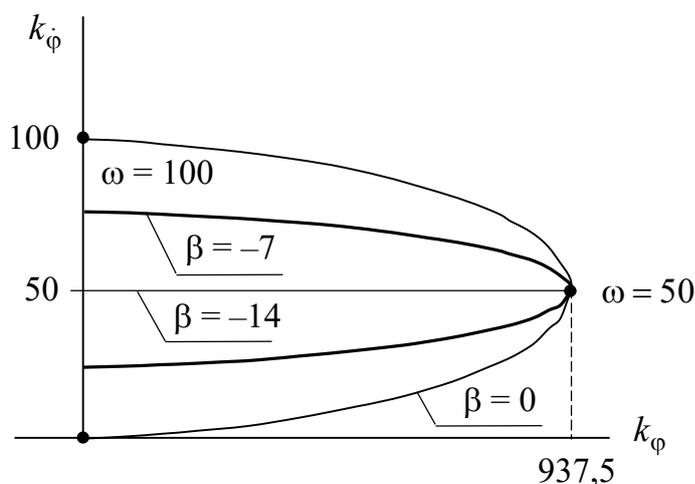


Рис. 2.13. Линии равной степени устойчивости

Из последнего соотношения получаем

$$\beta^* = -\frac{f}{4I_k} = -14 \text{ с}^{-1}.$$

## 2.7. Функции Ляпунова динамических систем и их основные свойства. Прямой метод Ляпунова оценки устойчивости динамических систем

Выше указывалось, что в случае нулевого действительного корня или пары чисто мнимых корней характеристического уравнения (2.59) системы первого приближения (2.58), а также в случае неаналитичности вектор-функции  $\Phi[X(t), \alpha]$ , невозможно сделать заключение об устойчи-

ности исходной нелинейной системы (2.57) по соответствующей ей модели первого приближения (2.58). Для оценки устойчивости исходной нелинейной системы (2.57) в этом случае обычно используют теоремы прямого или второго метода Ляпунова.

Введем понятия знакоопределенной и знакопостоянной функций [11]. Функция переменных  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , обозначенная через  $V[X(t)]$  и равная нулю только при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , а для всех остальных значений  $x_k, (k = \overline{1, n})$ , имеющая один и тот же знак, называется знакоопределенной.

Функция  $V[X(t)]$ , обращающаяся в ноль не только при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , но и при некоторых других значениях переменных  $x_k, (k = \overline{1, n})$ , а для всех остальных значений  $x_k (k = \overline{1, n})$ , сохраняющая постоянный знак, называется знакопостоянной.

В качестве примера знакоопределенной функции двух переменных может служить функция

$$V[x_1(t), x_2(t)] = x_1^2(t) + x_2^2(t), \quad (2.106)$$

представленная на рис. 2.14, а в качестве знакопостоянной функции двух переменных функция

$$V[x_1(t), x_2(t)] = [x_1(t) - x_2(t)]^2, \quad (2.107)$$

представленная на рис. 2.15.

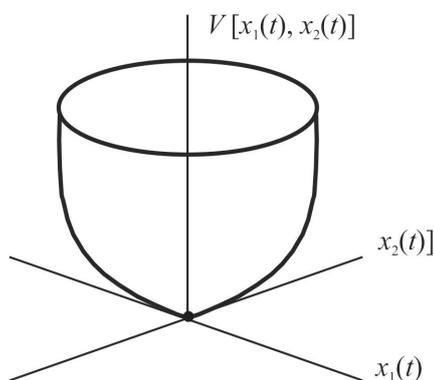


Рис. 2.14. Знакоопределенная функция (2.106)

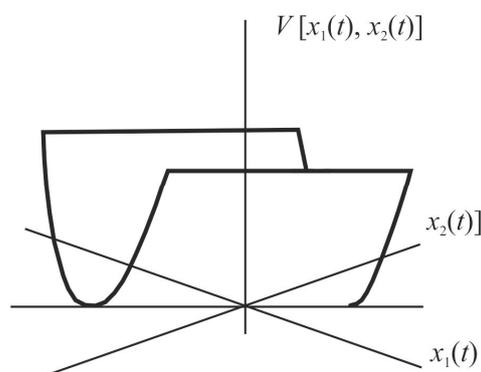


Рис. 2.15. Знакопостоянная функция (2.107)

В отличие от функции (2.106) функция (2.107) обращается в ноль не только в точке  $x_1 = x_2 = 0$ , но и всюду, где  $x_1 = x_2$ .

Функции, которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, называются знакопеременными.

Приведем некоторые признаки знакоопределенности и знакоопределенности функций:

- всякая форма нечетного порядка есть функция знакопеременная;
- знакоопределенность или знакопеременность аналитических функций определяется совокупностью членов наименьшего порядка в разложениях этих функций;
- знакоопределенная функция должна содержать все переменные, определяющие состояние системы; если какая-либо переменная отсутствует, то функция может быть только знакопостоянной;
- формы четного порядка могут быть как знакоопределенными, так и знакопеременными.

Для квадратичных форм необходимый и достаточный признак определенной положительности дает критерий Сильвестра, в соответствии с которым квадратичная форма

$$V[X(t)] = \langle X(t), KX(t) \rangle$$

определенно положительна, если определитель матрицы  $K$  и все его главные диагональные миноры положительны.

Прямой метод Ляпунова сводится к построению такой функции  $V[X(t)]$ , полная производная по времени которой обладает некоторыми специфическими для устойчивости свойствами. Основу прямого метода Ляпунова составляют теоремы Ляпунова об устойчивости установившегося равновесия динамической системы.

**Теорема 1.** Если дифференциальное уравнение возмущенного движения динамической системы (2.57) таково, что можно найти знакоопределенную функцию  $V[X(t), \alpha]$ , полная производная которой по времени, вычисленная в силу этого уравнения, была бы знакопостоянной функцией противоположного знака с  $V[X(t), \alpha]$  или тождественно равной нулю, то состояние установившегося равновесия динамической системы (2.57) является устойчивым.

**Теорема 2.** Если дифференциальное уравнение возмущенного движения динамической системы (2.57) таково, что можно найти знакоопределенную функцию  $V[X(t), \alpha]$ , полная производная которой по времени, вычисленная в силу этого уравнения, была бы знакоопределенной функцией противоположного знака с  $V[X(t), \alpha]$ , то всякое возмущенное движение будет асимптотически приближаться к состоянию установившегося равновесия.

Полная производная функции  $V[X(t), \alpha]$  по времени, вычисленная в силу уравнения (2.57), вычисляется по правилу дифференцирования неявных функций

$$\begin{aligned} \frac{dV[X(t), \alpha]}{dt} &= \left\langle \frac{dV[X(t), \alpha]}{dX(t)}, \frac{dX(t)}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{dV[X(t), \alpha]}{dX(t)}, \Phi[X(t), \alpha] \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{dV[X(t), \alpha]}{dx_i(t)} \cdot \varphi_i[X(t), \alpha]. \end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрим задачу устойчивости нелинейной системы наведения и стабилизации танковой пушки в малой окрестности состояния установившегося равновесия. Пренебрежем «быстрыми» движениями коромысла электромагнита по сравнению с «медленными» движениями танковой пушки. Тогда дифференциальное уравнение (1.79) можно приближенно заменить алгебраическим уравнение

В малой окрестности состояния установившегося равновесия нелинейная характеристика стабилизатора представляется в виде (рис. 2.16)

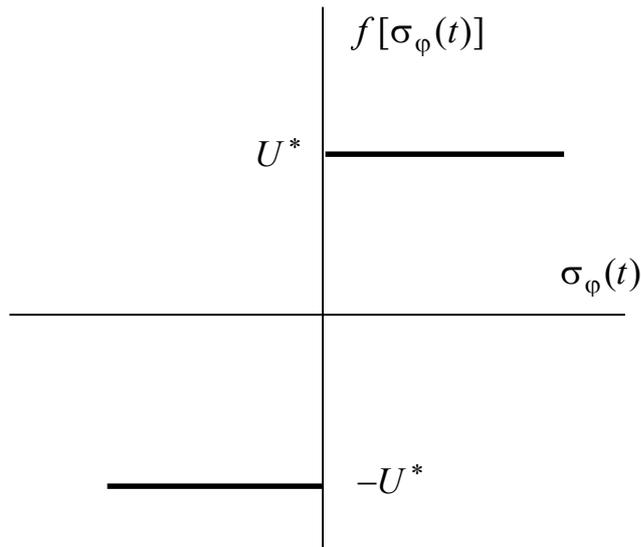


Рис. 2.16. Статическая характеристика стабилизатора в малой окрестности  
равновесного состояния

$$U_y(t) = f[\sigma_\varphi(t)] = U^* \operatorname{sign} \sigma_\varphi(t),$$

а математическая модель собственного возмущенного движения замкнутой системы наведения и стабилизации записывается

$$I_n \ddot{\varphi}(t) = -\frac{k_M k_D k_e k_o}{c} f[\sigma_\varphi(t)] - M_T(t); \quad (2.108)$$

$$\sigma_\varphi(t) = k_\varphi k_\Gamma \varphi(t) + k_\varphi k_c \dot{\varphi}(t),$$

где  $M_T(t)$  – момент жидкостного трения в оси цапф танковой пушки, определяемой соотношением

$$M_T(t) = f_T \cdot \dot{\varphi}(t).$$

Введем обозначения

$$\frac{k_M k_D k_e k_o}{c I_n} = k;$$

$$k_\varphi k_\Gamma = k_1; \quad k_\varphi k_c = k_2;$$

$$\frac{f_T}{I_n} = \xi.$$

С учетом принятых обозначений математическая модель (2.108) принимает вид

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}(t) + \xi\dot{\varphi}(t) &= -k f[\sigma_{\varphi}(t)]; \\ \sigma_{\varphi}(t) &= k_1\varphi(t) + k_2\dot{\varphi}(t).\end{aligned}\tag{2.109}$$

Введем двумерный вектор состояния замкнутой системы (2.109)

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix}.$$

Тогда математическая модель замкнутой системы (2.109) приводится к нормальной форме

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -\xi x_2(t) - k f \sigma_{\varphi}(t); \\ \sigma_{\varphi}(t) &= k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t).\end{aligned}\tag{2.110}$$

Функцию Ляпунова замкнутой нелинейной системы (2.110) согласно работе [28] выберем в виде

$$V[x_1(t), x_2(t)] = a_1 x_1^2(t) + a_2 x_2^2(t) + \int_0^{\sigma} f(\sigma) d\sigma.\tag{2.111}$$

При  $a_1 > 0$  и  $a_2 > 0$  функция (2.111) является определенно положительной.

Вычислим полную производную функции (2.111) по времени в силу уравнений (2.110)

$$\begin{aligned}
\frac{dV[x_1(t), x_2(t)]}{dt} &= \frac{\partial V[x_1(t), x_2(t)]}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1(t)}{\partial t} + \\
&+ \frac{\partial V[x_1(t), x_2(t)]}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2(t)}{\partial t} + \frac{\partial V[x_1(t), x_2(t)]}{\partial \sigma_\varphi} \cdot \frac{\partial \sigma_\varphi(t)}{\partial t} = \\
&= 2a_1x_1(t)x_2(t) - 2a_2\xi x_2^2(t) - 2a_2kx_2(t)f[\sigma_\varphi(t)] + \\
&\quad + k_1x_2(t)f[\sigma_\varphi(t)] - k_2\xi x_2(t)f[\sigma_\varphi(t)] - \\
&\quad - k_2kf^2[\sigma_\varphi(t)].
\end{aligned} \tag{2.112}$$

Соотношение (2.112) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
\frac{dV[x_1(t), x_2(t)]}{dt} &= 2a_1x_1(t)x_2(t) - \\
&- \left[ 2a_2\xi x_2^2(t) + (2a_2k - k_1 + k_2\xi)x_2(t)f[\sigma_\varphi(t)] + \right. \\
&\quad \left. + k_2kf^2[\sigma_\varphi(t)] \right].
\end{aligned} \tag{2.113}$$

В соотношении (2.113) выражение в квадратных скобках преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
&\left[ \sqrt{2a_2\xi} x_2(t) + \sqrt{k_2k} f[\sigma_\varphi(t)] \right]^2 = \\
&= 2a_2\xi x_2^2(t) + 2\sqrt{2a_2\xi k_2k} x_2(t)f[\sigma_\varphi(t)] + \\
&\quad + k_2kf^2[\sigma_\varphi(t)].
\end{aligned} \tag{2.114}$$

Из (2.113) и (2.114) можно записать

$$2\sqrt{2a_2\xi k_2k} = 2a_2k - k_1 + k_2\xi. \tag{2.115}$$

Из соотношения (2.115) определяем величину  $a_2$  формулы (2.111).

В результате полная производная по времени функции Ляпунова (2.111) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \frac{dV[x_1(t), x_2(t)]}{dt} = 2a_1x_1(t)x_2(t) - \\ - \left[ \sqrt{2a_2\xi} x_2(t) + \sqrt{k_2k} f[\sigma_\varphi(t)] \right]^2. \end{aligned} \quad (2.116)$$

В малой окрестности состояния установившегося равновесия  $x_1 = x_2 = 0$  первое слагаемой в правой части соотношения (2.116) мало и при достаточно небольших значениях коэффициента  $a_1$  значительно меньше второго слагаемого, которое содержит функцию

$$|f[\sigma_\varphi(t)]| = U^*.$$

Кроме того величина  $\xi$  достаточно мала и квадратные скобки в правой части соотношения (2.116) можно в окрестности состояния установившегося равновесия представить в виде

$$\left[ \sqrt{2a_2\xi} x_2(t) + \sqrt{k_2k} f[\sigma_\varphi(t)] \right]^2 \approx k_2kU^{*2}.$$

Тогда соотношение (2.16) приближенно можно представить в виде

$$\frac{dV[x_1(t), x_2(t)]}{dt} = 2a_1x_1(t)x_2(t) - k_2kU^{*2}. \quad (2.117)$$

Обозначим через  $x_{1\max}$  и  $x_{2\max}$  – максимальные по абсолютной величине значения переменных состояния в переходном процессе в окрестности состояния установившегося равновесия. Тогда полная производная по времени функции Ляпунова (2.111) определяемая соотношением (2.117) является знакопостоянной отрицательной функцией, если постоянная  $a_1 > 0$  выбрана из условия

$$a_1 \leq \frac{k_2kU^{*2}}{2x_{1\max} x_{2\max}}. \quad (2.118)$$

Таким образом, замкнутая нелинейная система наведения и стабилизации танковой пушки (2.110) является устойчивой.

## Глава 3.

# ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 3.1. Проблема параметрического синтеза динамической системы и критерии оптимальности

Автоматизация проектирования является важнейшим фактором ускорения научно-технического прогресса, причем наибольший эффект от применения систем автоматизированного проектирования (САПР) достигается при автоматизации некоторых творческих функций человека на ранних стадиях разработки объекта проектирования.

Взаимодействие проектировщика с математической моделью объекта проектирования, реализованной на ЭВМ, создает качественно новые возможности в проектировании, когда человек, осуществляя диалог с ЭВМ, может творчески проанализировать различные варианты, промоделировать поведение объекта во внешней среде, что в ряде случаев позволяет исключить натурное моделирование, наконец, обоснованно выбрать наилучший (оптимальный) вариант. Процесс проектирования технических объектов особенно результативен, когда от отдельных инженерных расчетов, выполняемых с помощью ЭВМ, переходят к созданию САПР, в которой реализуются все его стадии.

Проектирование технических объектов с помощью ЭВМ сводится к решению ряда задач, относящихся к задачам анализа или к задачам синтеза. Под анализом технических объектов понимают изучение их свойств. При анализе не создаются новые объекты, а исследуются заданные. Понятие «синтез технического объекта» близко по содержанию к понятию «проектирование». Отличие заключается в том, что последнее означает весь процесс разработки объекта, а синтез характеризует часть этого процесса, когда создается какой-то вариант, не окончательный, то есть может выполняться при проектировании неоднократно, перемежаясь с решениями задач анализа. Синтез технических объектов направлен на создание новых вариантов, анализ же используется для их оценки. Решение задачи синтеза должно приводить к определению структуры и к оценке численных значений параметров разрабатываемых устройств. Если среди

вариантов структуры технического объекта ищется не любой приемлемый вариант, а наилучший (в определенном смысле), то такую задачу называют задачей структурной оптимизации. Расчет значений параметров, оптимальных относительно некоторого критерия при заданной структуре объекта проектирования, называется параметрической оптимизацией.

Критерий оптимальности обычно представляет собой количественную оценку качества системы. Так, основными требованиями к системе наведения и стабилизации танковой пушки являются:

- время наведения или быстродействие системы наведения, представляющей собой время, в течение которого ось канала ствола танковой пушки приводится из произвольного начального состояния к линии прицеливания;
- точность стабилизации, представляющая собой интегральное по времени отклонение оси канала ствола танковой пушки от линии прицеливания;
- энергетические затраты на стабилизацию, представляющие собой интегральную по времени энергию, затраченную на стабилизацию оси канала ствола относительно линии прицеливания.

Рассмотрим процесс стабилизации оси канала танковой пушки относительно линии прицеливания, представленной на рис. 3.1.

Очевидно, что точность системы стабилизации количественно можно оценить величиной заштрихованной площади под кривой переходного процесса. Эта площадь может быть оценена величиной определенного интеграла

$$I_{\varphi} = \int_0^T |\varphi(t)| dt. \quad (3.1)$$

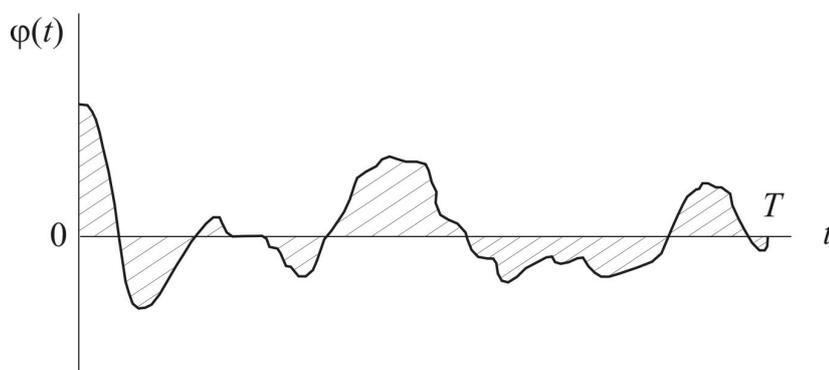


Рис. 3.1. К оценке точности системы стабилизации

Подынтегральная функция интеграла (3.1) является неаналитической, что создает определенные трудности при решении задачи синтеза системы стабилизации. В этой связи вместо интеграла (3.1) используют интеграл

$$I_{\varphi} = \int_0^T \varphi^2(t) dt, \quad (3.2)$$

который называют интегральным квадратичным функционалом.

Помимо функционала (3.2) качество системы стабилизации оценивается также функционалом

$$I_{\dot{\varphi}} = \int_0^T \dot{\varphi}^2(t) dt. \quad (3.3)$$

Чем меньше значения функционалов (3.2) и (3.3), тем выше точность системы стабилизации.

Функционалы (3.2) и (3.3) содержат элементы противоречия и имеют разные размерности. В этой связи при формировании аддитивного функционала, учитывающего требования к системе, обеспечиваемые как функционалом (3.2), так и функционалом (3.3), необходимо ввести весовые коэффициенты  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и представить аддитивный функционал в виде

$$I = \beta_1^2 I_{\varphi} + \beta_2^2 I_{\dot{\varphi}} = \int_0^T [\beta_1^2 \varphi^2(t) + \beta_2^2 \dot{\varphi}^2(t)] dt, \quad (3.4)$$

где весовые коэффициенты  $\beta_1$  и  $\beta_2$  подлежат выбору.

Энергетические затраты на стабилизацию могут быть оценены значением функционала

$$I_U = \int_0^T U_y^2(t) dt. \quad (3.5)$$

При этом совместный учет требований высокой точности и минимальных энергетических затрат на стабилизацию может быть осуществлен с помощью аддитивного функционала

$$I = \int_0^T \left[ \beta_1^2 \varphi^2(t) + \beta_2^2 \dot{\varphi}^2(t) + \beta_3^2 U_y^2(t) \right] dt. \quad (3.6)$$

Пусть в общем случае математическая модель стабилизируемого объекта записывается в векторно-матричной форме

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t). \quad (3.7)$$

Тогда задача синтеза оптимального стабилизатора для объекта (3.7) состоит в отыскании  $m$ -мерного вектора управления  $U(t)$ , доставляющего на решениях системы (3.7) минимум интегральному квадратичному функционалу

$$I = \int_0^T \left[ \langle X(t), QX(t) \rangle + \langle U(t), RU(t) \rangle \right] dt. \quad (3.8)$$

В соотношении (3.8) через  $Q$  и  $R$  обозначены диагональные матрицы размером  $n \times n$  и  $m \times m$  соответственно, диагональные элементы которых представляют собой весовые коэффициенты, подлежащие выбору.

Сформулированная задача является задачей структурно-параметрического синтеза, когда необходимо отыскать структуру и параметры  $m$ -мерного вектора управления  $U(t)$ . Однако большинство практических задач относятся к задачам параметрического синтеза, когда структура вектора управления  $U(t)$  задана в виде

$$U(t) = SX(t), \quad (3.9)$$

где  $S$  – прямоугольная матрица, содержащая  $m$  строк и  $n$  столбцов, элементы которой являются варьируемыми параметрами управляющих воздействий формируемых системой автоматического управления (САУ). Тогда математическая модель возмущенного движения замкнутой САУ (3.7), (3.9) записывается

$$\dot{X}(t) = [A + BS]X(t). \quad (3.10)$$

Задача параметрического синтеза стабилизатора заданной структуры (3.9) состоит в отыскании элементов матрицы  $S$ , таких, чтобы на решениях системы (3.10) достигал минимума интегральный квадратичный функционал

$$I = \int_0^T \langle X(t), QX(t) \rangle dt. \quad (3.11)$$

### 3.2. Принцип максимума

Принцип максимума был предложен в 1959 году Л. С. Понтрягиным для решения задачи оптимального быстродействия, которая формируется следующим образом.

Пусть математическая модель объекта управления представлена в виде (3.7). Предположим, что на компоненты вектора управления  $U(t)$  наложены ограничения, которые в общем случае записываются в виде

$$U(t) \in G_u, \quad (3.12)$$

где  $G_u$  – множество допустимых векторов управления. Требуется отыскать вектор управления (3.12), с помощью которого объект (3.7) переводится из произвольного начального состояния  $X(0)$  в нулевое конечное состояние  $X(T) = 0$  за минимально возможное время  $T$ .

В соответствии с принципом максимума [29, 30] составим функцию Гамильтона

$$\begin{aligned} H[\Psi(t), X(t), U(t)] &= \langle \Psi(t), [AX(t) + BU(\omega)] \rangle = \\ &= \langle \Psi(t), AX(t) \rangle + \langle \Psi(t), BU(\omega) \rangle, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где  $n$ -мерный вектор  $\Psi(t)$  удовлетворяют уравнению

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{H[\Psi(t), X(t), U(t)]}{\partial X(t)} = -A^T \Psi(t). \quad (3.14)$$

Векторно-матричное дифференциальное уравнение (3.14) называют сопряженным по отношению к уравнению (3.7).

Принцип максимума формируется следующим образом: вектор управления (3.12) переводит объект (3.7) из произвольного начального состояния  $X(0)$  в точку  $X(T) = 0$  за минимально возможное время  $T$ , если существует ненулевая непрерывная вектор-функция  $\Psi(t)$ , такая, что функция Гамильтона (3.13) в любой момент  $0 \leq t \leq T$  достигает максимума.

В качестве примера использования принципа максимума рассмотрим задачу оптимального по быстродействию приведения оси канала ствола танковой пушки к линии прицеливания. Пренебрежем «быстрыми» движениями якоря электромагнита по сравнению с «медленными» движениями танковой пушки. Тогда из первых двух уравнений системы (1.81) имеем

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{k_M k_D k_C}{r_y c I_n} U_y(t).$$

Обозначим

$$-\frac{k_M k_D k_C}{r_y c I_n} = b.$$

Тогда последнее уравнение может быть записано

$$\ddot{\varphi}(t) = b U_y(t). \quad (3.15)$$

На уравнение  $U_y(t)$  наложим ограничение

$$|U_y(t)| \leq U^{**} \quad (3.16)$$

в соответствии с формулой (1.11).

Введем замену переменных  $\varphi(t) = x_1(t)$ ;  $\dot{\varphi}(t) = x_2(t)$ . Тогда дифференциальное уравнение второго порядка (3.15) представим в нормальной форме, т. е. в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= b U_y(t). \end{aligned} \quad (3.17)$$

В соответствии с формулой (3.13) запишем функцию Гамильтона рассматриваемой системы

$$H[\Psi(t), X(t), U(t)] = \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)bU_y(t),$$

где функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  удовлетворяют сопряженной системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}_1(t) = -\frac{\partial H[\Psi(t), X(t), U(t)]}{\partial x_1(t)} = 0;$$

$$\dot{\psi}_2(t) = -\frac{\partial H[\Psi(t), X(t), U(t)]}{\partial x_2(t)} = -\psi_1(t).$$

Интегрируя сопряженную систему, получаем

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= \psi_1(0); \\ \psi_2(t) &= -\psi_1(0) \cdot t + \psi_2(0).\end{aligned}\tag{3.19}$$

Функция Гамильтона (3.18) достигает максимума в любой момент времени  $0 \leq t \leq T$ , если

$$U_y(t) = -U^* \operatorname{sign} \psi_2(t).\tag{3.20}$$

Знак минус правой части (3.20) определяется тем, что величина коэффициента  $b$  отрицательна.

В соответствии с формулами (3.19) соотношение (3.20) принимает вид

$$U_y(t) = -U^* \operatorname{sign}[-\psi_1(0) \cdot t + \psi_2(0)].\tag{3.21}$$

Функция  $\psi_2(t)$  на интервале  $0 \leq t \leq T$  изменяет знак не более одного раза (рис. 3.2). Это означает, что оптимальное по быстродействию управление представляет собой кусочно-постоянную функцию с моментом переключения  $t_n \in [0, T]$ .

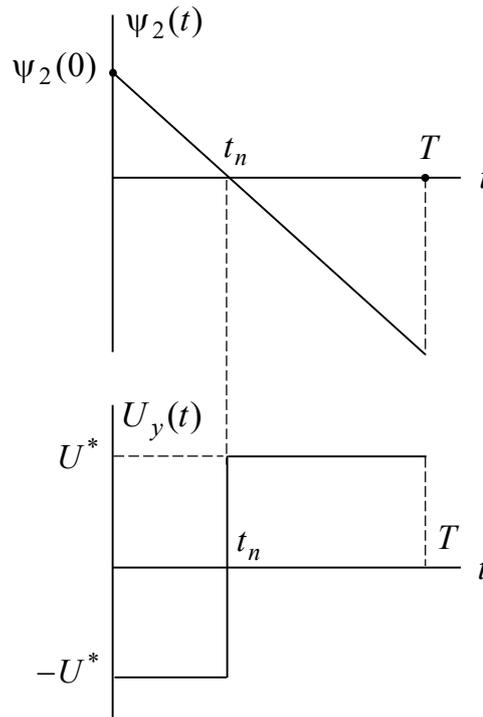


Рис. 3.2. К отысканию оптимального по быстродействию управления  
 Пусть  $u_y(t) = -u^*$ . Тогда уравнения (3.17) принимают вид

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t); \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = bU^*. \quad (3.22)$$

Из уравнения (3.22) имеем

$$dt = \frac{dx_2(t)}{bU^*}. \quad (3.23)$$

Подставим (3.23) в правое уравнение (3.22)

$$dx_1(t) = \frac{1}{bU^*} x_2(t) dx_2(t). \quad (3.24)$$

Игнорируя соотношение (3.24), получаем

$$x_1(t) = \frac{1}{2bU^*} x_2^2(t) + c_1, \quad (3.25)$$

где  $c_1$  – производная постоянная, определяемая начальными условиями.

Если положить  $U_y(t) = -U^*$ , то

$$x_1(t) = -\frac{1}{2bU^*} x_2^2(t) + c_2. \quad (3.26)$$

Анализ соотношений (3.25) и (3.26) позволяет сделать вывод, что в случае  $U_y(t) = U^*$  изображающая точка системы по параболической фазовой траектории (3.25) перемещается снизу вверх, а в случае  $U_y(t) = -U^*$  изображающая точка по параболической фазовой траектории (3.26) перемещается сверху вниз (рис. 3.3).

В начало координат ведут две полупараболы, описываемые соотношениями (3.25) и (3.26) при  $c_1 = 0$  и  $c_2 = 0$ . Эти полупараболы в совокупности образуют линию переключения, описываемую соотношением

$$x_1(t) = \frac{1}{2bU^*} \text{sign}[x_2(t)] x_2^2(t),$$

или

$$x_1(t) - \frac{1}{2bU^*} \text{sign}[x_2(t)] x_2^2(t) = 0. \quad (3.27)$$

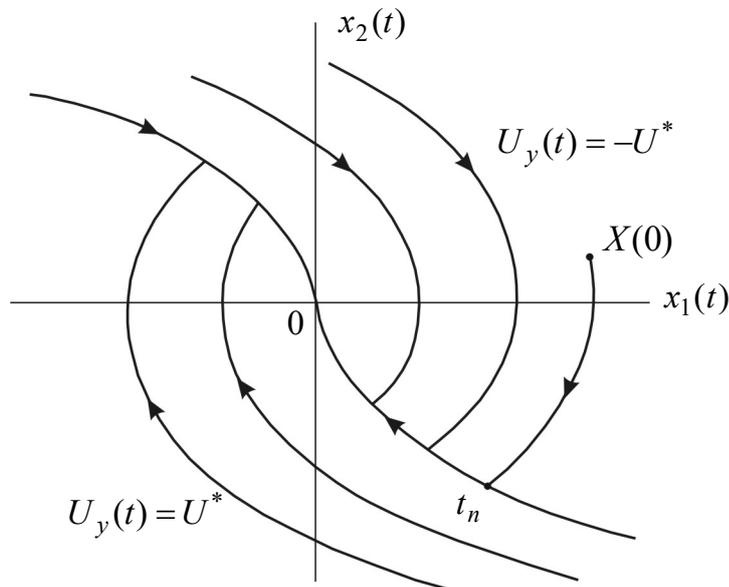


Рис. 3.3. Фазовые траектории оптимальной по быстродействию системы

Если в момент времени  $t = 0$  изображающая точка находится над линией переключения (3.27), то левая часть соотношения (3.27) больше нуля и следует включать управление  $U_y(t) = -U^*$ , под действием которо-

го изображающая точка движется по параболе (3.26) до встречи с линией переключения в момент  $t_n \in [0, T]$ . В этот момент происходит переключение управления с  $U_y(t) = -U^*$  на  $U_y(t) = +U^*$  и изображающая точка по нижней полупараболе проходит в момент  $T$  в начало координат. Таким образом оптимальное по быстрдействию управление может быть записано в виде

$$U_y(t) = -U^* \operatorname{sign} \left\{ x_1(t) - \frac{1}{2bU^*} \operatorname{sign}[x_2(t)] x_2^2(t) \right\}. \quad (3.28)$$

Оптимальный по быстрдействию нелинейный закон управления (3.28) легко может быть реализован с помощью бортовой ЭВМ.

### 3.3. Метод динамического программирования

Метод динамического программирования был разработан в середине 50-х годов XX столетия американским математиком Р. Беламаном. В 60-х годах этот метод был применен советскими учеными А. М. Летовым, А. А. Красовским и М. Е. Салуквадзе для оптимизации систем автоматического управления, в частности, систем стабилизации подвижных объектов, в результате чего была создана теория аналитического конструирования оптимальных регуляторов (теория АКОР).

Поставим следующую задачу. Для объекта (3.7) требуется отыскать вектор управления  $U(t)$ , доставляющий на решениях уравнения (3.7) минимум интегралу квадратичному функционалу (3.8).

В соответствии с работами [31, 32] введем в рассмотрение функцию Беммана

$$V[X(t)] = \min_t \int_t^T [\langle X(t), QX(t) \rangle + \langle U(t), RU(t) \rangle] dt, \quad (3.29)$$

удовлетворяющую функциональному уравнению Беммана

$$\frac{dV[X(t)]}{dt} = -\min_{U(t)} \{ \langle X(t), QX(t) \rangle + \langle U(t), RU(t) \rangle \}. \quad (3.30)$$

С учетом того, что

$$\begin{aligned}\frac{dV[X(t)]}{dt} &= \left\langle \frac{\partial V[X(t)]}{\partial X(t)}, \frac{\partial X(t)}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial V[X(t)]}{\partial X(t)}, [AX(t) + BU(t)] \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial V[X(t)]}{\partial X(t)}, AX(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial V[X(t)]}{\partial X(t)}, BU(t) \right\rangle,\end{aligned}$$

функциональное уравнение Беммана (3.30) принимает вид

$$\begin{aligned}\min_{U(t)} \left\{ \langle X(t), QX(t) \rangle + \langle U(t), RU(t) \rangle + \left\langle \frac{\partial V[X(t)]}{\partial X(t)}, AX(t) \right\rangle + \right. \\ \left. + \left\langle \frac{\partial V[X(t)]}{\partial X(t)}, BU(t) \right\rangle \right\} = 0.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Для отыскания минимума по  $U(t)$  выражения в фигурных скобках, продифференцируем его по  $U(t)$  и результат дифференцирования приравняем нулю

$$2RU(t) + B^T \frac{\partial V[X(t)]}{\partial X(t)} = 0.\quad (3.32)$$

Из формулы (3.32) следует

$$U(t) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \frac{\partial V[X(t)]}{\partial X(t)}.\quad (3.33)$$

Подставим соотношение (3.33) в уравнение (3.31), в результате чего получаем уравнение в частных производных относительно неизвестной функции  $V[X(t)]$

$$\begin{aligned}\langle X(t), QX(t) \rangle + \frac{1}{4} \left\langle R^{-1} B^T \frac{\partial V[X(t)]}{\partial X(t)}, B^T \frac{\partial V[X(t)]}{\partial X(t)} \right\rangle + \\ + \left\langle \frac{\partial V[X(t)]}{\partial X(t)}, AX(t) \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial V[X(t)]}{\partial X(t)}, BR^{-1} B^T \frac{\partial V[X(t)]}{\partial X(t)} \right\rangle = 0\end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} & \langle X(t), QX(t) \rangle + \left\langle \frac{\partial V[X(t)]}{\partial X(t)}, AX(t) \right\rangle - \\ & - \frac{1}{4} \left\langle \frac{\partial V[X(t)]}{\partial X(t)}, BR^{-1}B^T \frac{\partial V[X(t)]}{\partial X(t)} \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Решение дифференциального уравнения в частных производных (3.34) будем отыскивать в виде определенно-положительной квадратичной форме

$$V[X(t)] = \langle X(t), KX(t) \rangle, \quad (3.35)$$

где  $K$  – квадратная симметрическая Сильвестрова матрица.

Подставим (3.35) в уравнение (3.34), получаем

$$\begin{aligned} & \langle X(t), QX(t) \rangle + 2\langle KX(t), AX(t) \rangle - \\ & - \langle KX(t), BR^{-1}B^TKX(t) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Второе слагаемое в левой части (3.36) представим виде

$$2\langle KX(t), AX(t) \rangle = \langle A^TKX(t), X(t) \rangle + \langle X(t), KAX(t) \rangle. \quad (3.37)$$

С учетом (3.37) уравнение (3.36) записывается

$$\begin{aligned} & \langle X(t), QX(t) \rangle + \langle X(t), KAX(t) \rangle + \langle A^TKX(t), X(t) \rangle - \\ & - \langle X(t), KBR^{-1}B^TKX(t) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Уравнение (3.38) обращается в тождество, если матрица  $K$  удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению

$$Q + KA + A^TK - KBR^{-1}B^TK = 0. \quad (3.39)$$

Подставим соотношение (3.35) в формулу (3.33). В результате получаем

$$U(t) = -R^{-1}B^TKX(t). \quad (3.40)$$

Соотношение (3.40) определяет структуру оптимального стабилизатора, а уравнение (3.39) – значения его варьируемых параметров.

В качестве примера рассмотрим задачу структурно-параметрического синтеза системы наведения и стабилизации танковой пушки, возмущенное движение которой описывается уравнениями (3.17), а интегральный квадратичный функционал имеет вид (3.6). При этом соответствующие векторы и матрицы записываются

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}; \quad U(t) = u_y(t); \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} \beta_1^2 & 0 \\ 0 & \beta_2^2 \end{bmatrix};$$

$$R = \beta_3^2; \quad K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}; \quad B^T = [0 \quad b].$$

Тогда из соотношения (3.40) имеем

$$U_y(t) = -\frac{1}{\beta_3^2} [0 \quad b] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = -\frac{b}{\beta_3^2} [k_{12} x_1(t) + k_{22} x_2(t)]. \quad (3.41)$$

Для отыскания варьируемых параметров стабилизатора  $k_{12}$  и  $k_{22}$  составим матричное уравнение (3.39)

$$\begin{bmatrix} \beta_1^2 & 0 \\ 0 & \beta_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\beta_3^2} [0 \quad b] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Матричное уравнение (3.42) эквивалентно трем алгебраическим уравнениям относительно неизвестных элементов матрицы  $K$ :

$$\begin{aligned}
\beta_1^2 - \frac{b^2}{\beta_3^2} k_{12}^2 &= 0; \\
k_{11} - \frac{b^2}{\beta_3^2} k_{12} k_{22} &= 0; \\
\beta_2^2 + 2k_{12} - \frac{b^2}{\beta_3^2} k_{22}^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Отыскивая решения системы алгебраических уравнений (3.43), получаем

$$k_{12} = \frac{\beta_1 \beta_3}{|b|}; \quad k_{22} = \frac{\beta_3}{|b|} \sqrt{\beta_2^2 + \frac{2\beta_1 \beta_3}{|b|}}; \quad k_{11} = \beta_1 \sqrt{\beta_2^2 + \frac{2\beta_1 \beta_3}{|b|}}.$$

Матрица  $K$  имеет следующий вид

$$K = \begin{bmatrix} \beta_1 \sqrt{\beta_2^2 + \frac{2\beta_1 \beta_3}{|b|}} & \frac{\beta_1 \beta_3}{|b|} \\ \frac{\beta_1 \beta_3}{|b|} & \frac{\beta_3}{|b|} \sqrt{\beta_2^2 + \frac{2\beta_1 \beta_3}{|b|}} \end{bmatrix}.$$

Вычислим главные диагональные миноры матрицы  $K$ :

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \beta_1 \sqrt{\beta_2^2 + \frac{2\beta_1 \beta_3}{|b|}}; \\
\Delta_2 &= \frac{\beta_1 \beta_3 \beta_2^2}{|b|} + \frac{\beta_1^2 \beta_3}{b^2}.
\end{aligned}$$

Оба главных диагональных минора матрицы  $K$  положительны при  $\beta_1 > 0; \beta_2 > 0; \beta_3 > 0$ , следовательно, в соответствии с критерием Сильвестра матрица  $K$  является определенно-положительной.

Принцип максимума и метод динамического программирования являются методами структурно-параметрического синтеза, с помощью которых определяется как структура, так и значения параметров замкнутой динамической системы. Вместе с тем, из рассмотренного выше материала следует, что структура оптимальных по быстродействию и по точности замкнутых динамических систем предполагает использование

информации о всех компонентах вектора состояния объекта управления. Получение такой информации связано со значительными, а порой и непреодолимыми трудностями. В этой связи в инженерной практике значительно более широкое распространение получили методы параметрического, когда структуру системы автоматического управления и требования к ней задает разработчик, а значения варьируемых параметров, удовлетворяющих заданным требованиям, выбирает САПР. Ниже изложен один из наиболее распространенных методов параметрического синтеза замкнутых динамических систем, известных под названием принципа минимакса.

### 3.4. Принцип минимакса

Будем предполагать, что структура вектора управления динамической системы (3.7) выбрана в виде (3.9), а математическая модель возмущенного движения замкнутой динамической системы имеет вид (3.10). Требуется отыскать элементы матрицы варьируемых параметров  $S$ , такие чтобы на решениях математической модели (3.10) достигал минимума интегральный квадратичный функционал (3.11).

В соответствии с принципом минимакса [33] рассмотрим функцию

$$V[X(t), S] = \int_t^T \langle X(t), QX(t) \rangle dt, \quad (3.44)$$

удовлетворяющую уравнению Ляпунова,

$$\frac{dV[X(i), S]}{dt} = -\langle X(t), QX(i) \rangle, \quad (3.45)$$

полная производная по времени которой, вычисленная в силу уравнения (3.10), имеет вид

$$\frac{dV[X(t), S]}{dt} = \left\langle \frac{\partial V[X(t), S]}{\partial X(t)}, (A + BS)X(t) \right\rangle. \quad (3.46)$$

С учетом соотношения (3.46) уравнение Ляпунова (3.45) записывается

$$\left\langle \frac{\partial V[X(t), S]}{\partial X(t)}, (A + BS)X(t) \right\rangle + \langle X(t), QX(t) \rangle = 0. \quad (3.47)$$

Решение уравнения Ляпунова (3.47) будем отыскивать в виде определенно-положительной квадратичной форме

$$V[X(t), S] = \langle X(t), K(s)X(t) \rangle. \quad (3.48)$$

Подставляя (3.48) в уравнение (3.47), получаем

$$2\langle K(s)X(t), (A + BS)X(t) \rangle + \langle X(t), QX(t) \rangle = 0. \quad (3.49)$$

Первые слагаемые в левой части (3.49) представим в виде

$$\begin{aligned} & 2\langle K(s)X(t), (A + BS)X(t) \rangle = \\ & = \langle X(t), K(s)(A + BS)X(t) \rangle + \langle (A + BS)^T K(s)X(t), X(t) \rangle. \end{aligned} \quad (3.50)$$

С учетом (3.50) уравнение (3.49) записывается

$$\begin{aligned} & \langle X(t), K(s)(A + BS)X(t) \rangle + \langle (A + BS)^T K(s)X(t), X(t) \rangle + \\ & + \langle X(t), QX(t) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Уравнение (3.51) обращается в тождество, если квадратная симметрическая матрица  $K(s)$  удовлетворяет матрицу линейному алгебраическому уравнению

$$K(s)(A + BS) + (A + BS)^T K(s) + Q = 0. \quad (3.52)$$

Отыскав из уравнения (3.52) матрицу  $K(s)$ , подставим ее в соотношение (3.48), в результате чего получим функцию Ляпунова  $V[X(t), S]$ .

Сравнивая соотношения (3.11), (3.44) и (3.48), запишем

$$I = V[X(0), S] = \langle X(0), K(s)X(0) \rangle. \quad (3.53)$$

Таким образом, значение функционала (3.11) определяется значениями компонент вектора состояния  $X(t)$  в момент времени  $t = 0$  и значениями элементов матрицы  $S$ , являющихся варьируемыми параметрами замкнутой динамической системы. Коль скоро положение точки  $X(0)$

в значительной степени случайно, будем отыскивать минимум функционала (3.53) по  $S$  при наихудшем сочетании компонент вектора  $X(0)$ , т. е. будем отыскивать минимакс функционала (3.53)

$$I^* = \min_{S \in G_S} \max_{X(0) \in G_X} V[X(0), S], \quad (3.54)$$

где  $G_S$  – множество допустимых варьируемых параметров системы;  $G_X$  – множество допустимых векторов состояния в эвклидовом пространстве  $R^n$ . В качестве множества  $G_S$  обычно выбирают область устойчивости замкнутой системы в пространстве варьируемых параметров [34].

В качестве примера рассмотрим задачу параметрического синтеза стабилизатора танковой пушки, реализующего алгоритм стабилизации

$$U_y(t) = s_1 x_1(t) + s_2 x_2(t). \quad (3.55)$$

Подставим (3.55) в правую часть второго уравнения системы (3.17). В результате получаем математическую модель наведения и стабилизации

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= b[s_1 x_1(t) + s_2 x_2(t)]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Функционал (3.11) выберем в виде

$$I = \int_t^T [\beta_1^2 x_1^2(t) + \beta_2^2 x_2^2(t)] dt, \quad (3.57)$$

тогда соответствующие векторы и матрицы записываются

$$\begin{aligned} A + BS &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ bs_1 & bs_2 \end{bmatrix}; & Q &= \begin{bmatrix} \beta_1^2 & 0 \\ 0 & \beta_2^2 \end{bmatrix}; \\ K(s) &= \begin{bmatrix} k_{11}(s) & k_{12}(s) \\ k_{12}(s) & k_{22}(s) \end{bmatrix}, \\ (A + BS)^T &= \begin{bmatrix} 0 & bs_1 \\ 1 & bs_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

а линейное матричное уравнение (3.52) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k_{11}(s) & k_{12}(s) \\ k_{12}(s) & k_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ bs_1 & bs_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & bs_1 \\ 1 & bs_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}(s) & k_{12}(s) \\ k_{12}(s) & k_{22}(s) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \beta_1^2 & 0 \\ 0 & \beta_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Матричное уравнение (3.58) эквивалентно трем линейным алгебраическим уравнениям относительно элементов матрицы  $K(s)$ :

$$\begin{aligned} 2k_{12}(s)bs_1 + \beta_1^2 &= 0; \\ k_{11}(s) + k_{12}(s)bs_2 + k_{22}(s)bs_1 &= 0; \\ 2[k_{12}(s) + k_{22}(s)bs_2] + \beta_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Решения системы алгебраических уравнений (3.59) записываются в виде

$$\begin{aligned} k_{11}(s) &= \frac{\beta_1^2 s_2}{2s_1} + \frac{\left(\beta_2^2 - \frac{\beta_1^2}{bs_1}\right)s_1}{2s_2}; \\ k_{12}(s) &= -\frac{\beta_1^2}{2bs_1}; \quad k_{22}(s) = -\frac{\beta_2^2 - \frac{\beta_1^2}{bs_1}}{2bs_2}. \end{aligned}$$

В связи с тем, что  $b < 0$ , все элементы матрицы  $K(s)$  положительны при  $s_1 > 0$  и  $s_2 > 0$ . Запишем главные диагональные миноры матрицы  $K(s)$

$$\Delta_1 = k_{11}(s) = \frac{\beta_1^2 s_2}{2s_1} + \frac{\left(\beta_2^2 - \frac{\beta_1^2}{bs_1}\right)s_1}{2s_2} > 0;$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 = \det K(s) &= -\frac{\beta_1^2 \left( \beta_2^2 - \frac{\beta_1^2}{bs_1} \right)}{4bs_1} - \frac{\left( \beta_2^2 - \frac{\beta_1^2}{bs_1} \right)^2 s_1}{4bs_2^2} - \frac{\beta_1^4}{4b^2 s_1^2} = \\ &= -\frac{\beta_1^2 \beta_2^2}{4bs_1} - \frac{\left( \beta_2^2 - \frac{\beta_1^2}{bs_1} \right)^2 s_1}{4bs_2^2} > 0.\end{aligned}$$

Оба главных диагональных минора матрицы  $K(s)$  положительны, следовательно, в соответствии с критерием Сильвестра квадратичная форма

$$V[X(0), S] = k_{11}(s)x_1^2(0) + 2k_{12}(s)x_1(0)x_2(0) + k_{22}(s)x_2^2(0) \quad (3.60)$$

является определенно-положительной.

Не ограничивая общности предположим:  $x_1(0) = x_{1\max} = 1$ ;  $x_2(0) = x_{2\max} = 1$ . Тогда квадратичная форма (3.60) может быть записана

$$\begin{aligned}V[s_1, s_2] &= k_{11}(s) + 2k_{12}(s) + k_{22}(s) = \\ &= \frac{\beta_1^2 s_2}{2s_1} + \frac{\left( \beta_2^2 - \frac{\beta_1^2}{bs_1} \right) s_1}{2s_2} - \frac{\beta_1^2}{bs_1} - \frac{\beta_2^2 - \frac{\beta_1^2}{bs_1}}{2bs_2}.\end{aligned} \quad (3.61)$$

Определенно-положительная функция (3.61) достигает минимума при  $s_1 = s_{1\max}$  и  $s_2 = s_{2\max}$ .

### 3.5. Выбор весовых коэффициентов аддитивного критерия оптимальности

Анализ соотношений (3.43) и (3.59) показывает, что оптимальные значения варьируемых параметров динамических систем существенным образом зависят от весовых коэффициентов аддитивного функционала качества. Отсюда следует, что обязательным этапом процедуры струк-

турно-параметрического синтеза динамической системы является отыскание этих коэффициентов.

Обычно матрица  $Q$  функционала (3.11) выбирается в виде

$$Q = \begin{bmatrix} \beta_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_n^2 \end{bmatrix}.$$

Тогда функционал (3.11) записывается

$$I = \sum_{j=1}^n \beta_j^2 I_j, \quad (3.62)$$

где

$$I_j = \int_0^T x_j^2(t) dt, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (3.63)$$

Функционалы (3.63) имеют различные размерности, следовательно, различные размерности имеют также весовые коэффициенты  $\beta_j, (j = \overline{1, n})$ . В этой связи введем нормированные значения функционалов и весовых коэффициентов

$$\bar{I}_j = \frac{1}{x_{j \max}^2} \int_0^T x_j^2(t) dt = \frac{I_j}{x_{j \max}^2}; \quad (3.64)$$

$$\bar{\beta}_j = \beta_j x_{j \max}; \quad (j = \overline{1, n}), \quad (3.65)$$

где  $x_{j \max}$  – максимально возможное значение компоненты  $x_j(t)$  вектора состояния  $X(t)$  в переходном процессе. Тогда аддитивный функционал (3.62) принимает вид

$$I = \sum_{j=1}^n \bar{\beta}_j^2 \bar{I}_j, \quad (3.66)$$

причем в соотношении (3.66) все частные функционалы  $\bar{I}_j, (j = \overline{1, n})$  имеют одинаковые размерности (секунды), а весовые коэффициенты  $\bar{\beta}_j, (j = \overline{1, n})$  безразмерны.

Минимизация функционала (3.66) при заданных значениях весовых коэффициентов  $\bar{\beta}_j, (j = \overline{1, n})$  не вызывает затруднений. В то же время попытка минимизации функционала (3.66) по  $\bar{\beta}_j, (j = \overline{1, n})$  без ограничений на эти коэффициенты приводит к тривиальному решению  $\bar{\beta}_j, (j = \overline{1, n})$ , при котором функционал (3.66) обращается в нуль. В этой связи на величины коэффициентов  $\bar{\beta}_j, (j = \overline{1, n})$  наложим ограничение [35, 36]

$$\sum_{j=1}^n \bar{\beta}_j = 1. \quad (3.67)$$

Обозначим через  $\bar{I}_j^*, (j = \overline{1, n})$  минимальные значения частных функционалов (3.63), полученные при минимизации каждого из этих функционалов в отдельности. Тогда при фиксированных значениях весовых коэффициентов  $\bar{\beta}_j, (j = \overline{1, n})$  минимально возможное значение функционала (3.66) составляет

$$I = \sum_{j=1}^n \bar{\beta}_j^2 \bar{I}_j^*. \quad (3.68)$$

Отыщем минимум функционала (3.68) по  $\bar{\beta}_j, (j = \overline{1, n})$  при ограничении (3.67). Для решения этой задачи на условный экстремум составим функцию Лагранжа

$$F = \sum_{j=1}^n \bar{\beta}_j^2 \bar{I}_j + \lambda \left( 1 - \sum_{j=1}^n \bar{\beta}_j \right) \quad (3.69)$$

и запишем условия минимума функции (3.69)

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\beta}_j} = 2\bar{\beta}_j \bar{I}_j^* - \lambda = 0, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (3.70)$$

Из уравнений (3.70) имеем

$$\bar{\beta}_j = \frac{\lambda}{2\bar{I}_j^*}, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (3.71)$$

Подставим соотношения (3.71) в формулу (3.67). В результате получаем выражение для множителя Лагранжа

$$\lambda = \frac{2}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\bar{I}_j^*}}. \quad (3.72)$$

Подставляя (3.72) в (3.71), получаем

$$\bar{\beta}_j = \frac{1}{\bar{I}_j^* \sum_{j=1}^n \frac{1}{\bar{I}_j^*}}, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (3.73)$$

С учетом формул (3.64) и (3.65) соотношения (3.73) принимают вид

$$\beta_j = \frac{x_{j \max}}{I_j^* \sum_{j=1}^n \frac{x_{j \max}^2}{I_j^*}}, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (3.74)$$

В качестве примера рассмотрим задачу выбора весовых коэффициентов функционала (3.57).

Введем в рассмотрение частные функционалы

$$I_1 = \int_0^T x_1^2(t) dt; \quad I_2 = \int_0^T x_2^2(t) dt, \quad (3.75)$$

Тогда матрицы  $Q_1$  и  $Q_2$  принимают вид

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а соответствующие частные функционалы равны

$$I_1 = V[s_1, s_2] \Big|_{\substack{\beta_1=1 \\ \beta_2=0}} = \frac{s_2}{2s_1} - \frac{1}{2bs_2} - \frac{1}{bs_1} + \frac{1}{2b^2s_1s_2}; \quad (3.76)$$

$$I_2 = V[s_1, s_2] \Big|_{\substack{\beta_1=0 \\ \beta_2=1}} = \frac{s_1}{2s_2} - \frac{1}{2bs_2}. \quad (3.77)$$

Частный функционал (3.76) достигает минимума при  $s_1 = s_{1\max}$  и  $s_2 = s_{2\max}$ . При этом его минимальное значение составляет

$$I_1^* = \frac{s_{2\max}}{2s_{1\max}} - \frac{1}{2bs_{2\max}} - \frac{1}{bs_{1\max}} + \frac{1}{2b^2s_{1\max}s_{2\max}}. \quad (3.78)$$

Функционал (3.77) достигает минимума при  $s_1 = 0$  и  $s_2 = s_{2\max}$ , а его минимальное значение равно

$$I_2^* = -\frac{1}{2bs_{2\max}}. \quad (3.79)$$

Учитывая, что ранее предлагалось  $x_{1\max} = x_{2\max} = 1$ , значения весовых коэффициентов функционала (3.57), вычисленных с помощью формул (3.74), составляют

$$\beta_1 = \frac{I_2^*}{I_1^* + I_2^*}; \quad \beta_2 = \frac{I_1^*}{I_1^* + I_2^*}.$$

### 3.6. Алгоритмический метод параметрического синтеза динамической системы

В основу рассмотренных выше методов структурно-параметрического синтеза динамических систем положена концепция возмущенно-невозмущенного движения А. М. Ляпунова [31], в соответствии с которой результатом внешнего возмущения является мгновенный переход системы из нулевого состояния установившегося равновесия  $X = 0$  в некоторое начальное состояние  $X(0)$ , из которого система, предоставленная самой себе, возвращается в исходное состояние установившегося равновесия. Структурно-параметрическая и параметрическая оптимизация динамической системы состоят в выборе такой траектории перехода

из точки  $X(0)$  в точку  $X = 0$ , чтобы в процессе движения вдоль этой траектории значение функционала, вычисленное на решениях математической модели системы, достигало минимума. При этом вектор внешнего возмущения предполагается равным нулю.

Будем предполагать, что внешнее возмущение, действующее на динамическую систему (1.2), представляет собой случайную вектор-функцию  $F(t)$ . Задача параметрического синтеза системы (1.2) состоит в отыскании вектора варьируемых параметров  $\alpha \in G_\alpha$ , который на решениях математической модели динамической системы

$$\dot{X}(t) = \Phi[X(t), \alpha] + F(t) \quad (3.80)$$

доставляет минимум интегральному квадратичному функционалу

$$I(\alpha) = \underset{(j=1, N)}{M} \left\{ \int_0^T \langle X^j(t, \alpha), QX^j(t, \alpha) \rangle dt \right\}, \quad (3.81)$$

где  $\underset{(j=1, N)}{M} \{ \square \}$  – символ математического ожидания случайной величины

$\{ \square \}$  по реализациям случайного процесса  $X^j(t, \alpha)$ ,  $(j = \overline{1, N})$ ;  $Q$  – квадратная Сильвестрова матрица.

Сформулированная задача параметрического синтеза динамической системы относится к классу задач нелинейного программирования, в которой целевая функция (3.81) для каждого из векторов  $\alpha \in G_\alpha$  вычисляется по следующему правилу.

К системе дифференциальных уравнений (3.80)  $n$ -го порядка добавляется еще одно уравнение

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \langle X(t), QX(t) \rangle. \quad (3.82)$$

На вход системы (3.80), (3.82) подается  $j$ -я реализация векторного случайного процесса  $F^j(t)$  и находится решения системы (3.80), (3.82). Для  $N$  реализацией случайного процесса  $F^j(t)$  находятся  $N$  реализаций случайной функции  $x_{n+1}^j(t)$ ,  $(j = \overline{1, N})$ . Из соотношений (3.81) и (3.82) следует

$$I^j(\alpha) = x_{n+1}^j(T, \alpha), \quad (j = \overline{1, N}), \quad (3.83)$$

следовательно

$$I(\alpha) = \frac{M}{(j=1, N)} \left\{ x_{n+1}^j(T, \alpha) \right\} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{n+1}^j(T, \alpha) . \quad (3.84)$$

Оценим дисперсию случайной величины (3.83)

$$D(\alpha) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N \left[ x_{n+1}^j(T, \alpha) - I(\alpha) \right]^2 . \quad (3.85)$$

Зададимся необходимой точностью оценки функционала (3.84), т. е. величинами  $\varepsilon$  и  $\beta$ , для которых [37]

$$P \left\{ \left| I(\alpha) - I^j(\alpha) \right| \leq \varepsilon \right\} = \beta , \quad (3.86)$$

где  $P \{ \square \}$  – вероятность выполнения неравенства  $\{ \square \}$ .

В соответствии с [37] по заданной величине  $\beta$  с помощью таблиц находится значение коэффициента  $t_\beta$  и отыскивается необходимое количество реализаций вектор-функции  $F^j(t)$

$$N = \frac{D(\alpha) t_\beta^2}{\varepsilon^2} . \quad (3.87)$$

Рассмотрим систему первого приближения по отношению к исходной системе (3.80)

$$\dot{X}(t) = A(\alpha)X(t) + F(t) . \quad (3.88)$$

В работе [33] показано, что значение функционала (3.81), вычисленного на решениях системы (3.88), составляет

$$I(\alpha) = \langle X(0), K(\alpha)X(0) \rangle + TS_p \left[ Q_f K(\alpha) \right] , \quad (3.89)$$

где  $Q_f$  – матрица интенсивности внешнего возмущения  $F(t)$ ;  $S_p \{ \square \}$  – след матрицы  $\{ \square \}$ ;  $K(\alpha)$  – квадратная симметричная матрица Сильвестрова, удовлетворяющая матричному алгебраическому уравнению (3.52);  $T$  – время анализа случайного процесса.

Решение сформулированной выше задачи параметрического синтеза сводится к отысканию минимума по  $\alpha \in G_\alpha$  соотношения (3.89). Любой из известных численных методов поиска экстремума функции многих переменных, в том числе и наиболее распространенный метод Нелдера–Мида [38], реализованный в программных продуктах Optimization

Toolbox и Minimize в интерактивных средах MATLAB и MATHCAD соответственно, позволяет отыскать ближайший к стартовой точке локальный минимум минимизируемой функции. Отыскание глобального минимума функции существенно осложняет задачу параметрического синтеза [39. 40].

В качестве множества  $G_\alpha$  выберем область устойчивости системы (3.88), характеристическое уравнение которой записывается в виде

$$\det[A(\alpha) - ES] = 0. \quad (3.90)$$

При  $\alpha \in G_\alpha$  все корни характеристического уравнения (3.90) находятся слева от мнимой оси комплексной плоскости корней, а гиперповерхность  $\Gamma_\alpha$ , ограничивающая область  $G_\alpha$ , является отображением мнимой оси плоскости корней характеристического уравнения (3.90) на  $s$ -мерное пространство варьируемых параметров  $R^s$ .

В плоскости корней характеристического уравнения (3.90) рассмотрим линию (2.98) параллельную мнимой оси плоскости корней и отстоящую от мнимой оси на величину  $\beta < 0$ . Отображение этой линии на  $s$ -мерное пространство варьируемых параметров  $R^s$  определяет гиперповерхность  $\Gamma_\alpha(\beta)$ , называемую гиперповерхностью равной степени устойчивости и ограничивающую область  $G_\alpha$ . Если  $\alpha \in G_\alpha(\beta)$ , то степень устойчивости такой системы не менее  $\beta$ . Это означает, что при  $\alpha \in G_\alpha(\beta)$  ближайший к мнимой оси действительный корень или пара комплексно-сопряженных корней уравнения (3.90) отстоят слева от мнимой оси не менее чем на расстоянии  $|\beta|$ . Выбирая  $|\beta_1| < |\beta_2| < \dots < |\beta_k|$ , получаем множества  $G_\alpha(\beta_1), G_\alpha(\beta_2), \dots, G_\alpha(\beta_k)$ , ограниченные гиперповерхностями  $\Gamma_\alpha(\beta_1), \Gamma_\alpha(\beta_2), \dots, \Gamma_\alpha(\beta_k)$  соответственно, вложенными друг в друга

$$G_\alpha(\beta_k) \in G_\alpha(\beta_{k-1}) \in \dots \in G_\alpha(\beta_1).$$

Предположим, что при  $\beta = \beta_k$  множество  $G_\alpha(\beta_k)$  и гиперповерхность  $\Gamma_\alpha(\beta_k)$  стягиваются в точку  $\alpha^*$  в  $s$ -мерном пространстве  $R^s$ , либо в множество  $\bar{G}_\alpha(\beta_k)$ , ограниченное гиперповерхностью  $\bar{\Gamma}_\alpha(\beta_k)$  в том же пространстве, причем множество  $\bar{G}_\alpha(\beta_k)$  и гиперповерхность  $\bar{\Gamma}_\alpha(\beta_k)$  имеют размерность меньше, чем размерность множества  $G_\alpha(\beta_k)$  и гиперповерхности  $\Gamma_\alpha(\beta_k)$ . Так, в примере раздела 2.6 часть плоскости,

ограниченной кривой, определяемой соотношениями (2.104) и (2.105), стягивается в отрезке прямой, параллельной оси абсцисс.

Введем понятие главной обобщенной координаты динамической системы, иными словами, координаты в наибольшей мере характеризующей поведение системы. Изменение главной координаты в динамическом процессе главным образом определяет значение функционала (3.89). Внешнее воздействие, приложенное к динамической системе, как правило, входят в правую часть уравнения, описывающую главную координату. Например, в математической модели замкнутой системы (2.19) главной координатой следует считать угловое отклонение  $\varphi(t)$  оси канала ствола танковой пушки от линии прицеливания, а внешнее возмущение  $M_n(t)$  входит в правую часть дифференциального уравнения, описывающего изменение главной координаты.

Обозначим главную обобщенную координату вектора состояния динамической системы (3.88) через  $x_1(t)$ , а ее значение в момент времени  $t = 0$  через  $x_1(0)$ . Все остальные компоненты вектора  $X(0)$  положим равным нулю. Через  $q_1$  обозначим интенсивность внешнего воздействия, вызывающего изменение главной обобщенной координаты, а через  $x_2(t)$  обозначим обобщенную скорость изменения главной обобщенной координаты  $x_1(t)$ . Тогда значение функционала (3.89) приближенно равно

$$I(\alpha) = k_{11}(\alpha)x_1^2(0) + Tq_1k_{22}(\alpha). \quad (3.90)$$

Если воспользоваться концепцией возмущенно-невозмущенного движения Ляпунова и положить в (3.88)  $F(t) = 0$ , то функционал (3.90) принимает вид

$$I(\alpha) = k_{11}(\alpha)x_1^2(0). \quad (3.91)$$

В связи с тем, что минимум функции не зависит от постоянного множителя этой функции, соотношение (3.91) в процессе его минимизации может быть представлено в виде

$$I(\alpha) = k_{11}(\alpha). \quad (3.92)$$

Известно [31], что любой устойчивой динамической системе

$$\dot{X}(t) = A(\alpha)X(t) \quad (3.93)$$

соответствует функция Ляпунова  $V[X(t), \alpha]$ , представляющая собой определенно положительную квадратичную форму

$$V[X(t), \alpha] = \langle X(t), K(\alpha)X(t) \rangle,$$

где квадратная симметрическая матрица  $K(\alpha)$  удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению

$$K(\alpha)A(\alpha) + A^T(\alpha)K(\alpha) + Q = 0. \quad (3.94)$$

Выше было показано, что функционал качества в этом случае приближенно определяется формулой (3.92). Для любой точки  $\alpha \in G_\alpha(\beta_j)$ , ( $j = \overline{1, k}$ ) имеем

$$I(\alpha_j) = k_{11}(\alpha_j), \quad (j = \overline{1, k}), \quad (3.95)$$

причем при  $\alpha = \alpha^*$  функционал (3.95) достигает минимума

$$I(\alpha^*) = k_{11}(\alpha^*).$$

Коль скоро с возрастанием  $j = \overline{1, k}$  степень устойчивости системы (3.93) возрастает, значение функции (3.95) убывает

$$k_{11}(\alpha_1) > k_{11}(\alpha_2) > k_{11}(\alpha_3) > \dots > k_{11}(\alpha^*). \quad (3.96)$$

Неравенство (3.96) доказывает единственность минимума функции (3.95) по  $\alpha$  при  $\alpha \in G_\alpha$ .

Если положить  $F(t) \neq 0$ , то  $x_1(0)$  также можно принять равным нулю. В этом случае функционал (3.90) записывается

$$I(\alpha) = Tq_1 k_{22}(\alpha). \quad (3.97)$$

Учитывая, что точка минимума функционала (3.97) не зависит от постоянного множителя  $Tq_1$ , функционал (3.97) может быть представлен

$$I(\alpha) = k_{22}(\alpha). \quad (3.98)$$

Используя изложенные выше рассуждения в отношении функционала (3.98), приходим к неравенству (3.96), доказывающему единственность точки минимума функционала (3.98) в области  $G_\alpha$ .

Рассмотрим замкнутую систему наведения и стабилизации танковой пушки, возмущенное движение которой описывается системой дифференциальных уравнений (2.20), собственная матрица которой равна

$$A(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10^3 k_\varphi & 0,2 \cdot 10^3 k_{\dot{\varphi}} & -10^{-4} & -50 \end{bmatrix}.$$

В системе (2.20) главной обобщенной координатой является переменная  $x_1(t)$ , а обобщенной скоростью изменения главной координаты – переменная  $x_2(t)$ . Матрица  $Q$  матричного уравнения (3.94) в этом случае представляется в виде

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.99)$$

а матрица интенсивности внешнего возмущения  $M_n(t)$  в виде

$$Q_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.100)$$

где  $q_m = \frac{1}{I_n} S_m(0)$ ;  $S_m(\omega)$  – спектральная плотность случайной функции  $M_n(t)$ .

Квадратную симметрическую матрицу  $K(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}})$  будем отыскивать в виде

$$K(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) = \begin{bmatrix} k_{11}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) & k_{12}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) & k_{13}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) & k_{14}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) \\ k_{12}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) & k_{22}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) & k_{23}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) & k_{24}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) \\ k_{13}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) & k_{23}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) & k_{33}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) & k_{34}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) \\ k_{14}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) & k_{24}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) & k_{34}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) & k_{44}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) \end{bmatrix}.$$

Тогда из матричного уравнения (3.94) получаем систему 10-ти алгебраических уравнений относительно неизвестных элементов матрицы  $K(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}})$

$$\begin{aligned}
 2 \cdot 10^3 k_\varphi k_{14} + 1 &= 0; \\
 k_{11} + 0,2 \cdot 10^3 k_{\dot{\varphi}} k_{14} + 10^3 k_\varphi k_{24} &= 0; \\
 -10k_{12} - 10^4 k_{14} + 10^3 k_\varphi k_{34} &= 0; \\
 k_{13} - 50k_{14} + 10^3 k_\varphi k_{44} &= 0; \\
 k_{12} + 0,2 \cdot 10^3 k_{\dot{\varphi}} k_{24} &= 0; \\
 -10k_{22} - 10^4 k_{24} + k_{13} + 0,2 \cdot 10^3 k_{\dot{\varphi}} k_{34} &= 0; \\
 k_{23} - 50k_{24} + k_{14} + 0,2 \cdot 10^3 k_{\dot{\varphi}} k_{44} &= 0; \\
 -10k_{23} - 10^4 k_{34} &= 0; \\
 k_{33} - 50k_{34} - 10k_{24} - 10^4 k_{44} &= 0; \\
 k_{34} - 50k_{44} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

Из системы (3.101) получаем

$$k_{11}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) = \frac{k_{\dot{\varphi}}}{k_\varphi} + \frac{10^3 k_{\dot{\varphi}} + 2,5k_\varphi - 25 \cdot 10^3}{40k_\varphi^2 - 10^3 k_{\dot{\varphi}} + 2,5k_\varphi}; \tag{3.102}$$

$$k_{22}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) = \frac{0,9k_{\dot{\varphi}}}{k_\varphi^2} + \frac{10^3 k_{\dot{\varphi}} + 2,5k_\varphi - 25 \cdot 10^3}{k_\varphi (40k_\varphi^2 - 10^3 k_{\dot{\varphi}} + 2,5k_\varphi)}. \tag{3.103}$$

Функция (3.102) достигает минимума при  $k_\varphi^* = 161$ ;  $k_{\dot{\varphi}}^* = 125$ , а функция (3.103) при  $k_\varphi^* = 730$ ;  $k_{\dot{\varphi}}^* = 125$ .

Рассмотрим общий случай решения задачи параметрического синтеза стабилизатора танковой пушки. Для системы (2.20) требуется выбрать такие значения варьируемых параметров  $k_\varphi$  и  $k_{\dot{\varphi}}$ , чтобы на решениях этой системы достигал минимума интегральный квадратичный функционал

$$I(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) = \underline{M}_{(j=1, N)} \left\{ \int_0^T \left[ \beta_1^2 (x_1^j(t))^2 + \beta_2^2 (x_2^j(t))^2 \right] dt \right\}, \quad (3.104)$$

где  $x_1^j(t)$  и  $x_2^j(t)$  – реализации случайных функций  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  при  $j$ -й реализации случайного внешнего воздействия  $M_n^j(t)$ .

На рис. 3.4 приведена структурно-логическая схема алгоритма решения сформулированной задачи параметрического синтеза. Алгоритм представляет собой совокупность четырех последовательных вычислительных блоков. Блок А1 представляет собой генератор случайной функции  $M_n^j(t)$ . Более подробно функционирование блока А1 описано в разделе 1.8.

С выхода блока А1 реализации момента внешнего возмущения  $M_n^j(t)$ ,  $j = \overline{1, N}$  поступают на вход блока А2, реализующего математическую модель замкнутой системы стабилизации (2.20), а также процедуру Minimize программного продукта MathCad или процедуру Optimization Toolbox программного продукта Matlab по отношению к частным функционалам

$$I_1(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) = \underline{M}_{(j=1, N)} \left\{ \int_0^T (x_1^j(t))^2 dt \right\}; \quad (3.105)$$

$$I_2(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) = \underline{M}_{(j=1, N)} \left\{ \int_0^T (x_2^j(t))^2 dt \right\}; \quad (3.106)$$

В результате на выходе блока А2 имеем минимальные значения частных функционалов (3.105) и (3.106)  $I_1^*$  и  $I_2^*$ .

С выхода блока А2 на вход блока А3 поступают величины  $I_1^*$  и  $I_2^*$ . Блок А3 реализует формулы (3.74) отыскания весовых коэффициентов  $\beta_1$  и  $\beta_2$  аддитивного функционала (3.104) и формирует аддитивный функционал (3.104), поступающий на вход блока А4.

Блок А4, как и блок А2, реализует математическую модель (2.20), а также указанные выше процедуры минимизации по отношению к аддитивному функционалу (3.104). В результате на выходе блока А4 имеем значения варьируемых параметров  $k_\varphi^*$  и  $k_{\dot{\varphi}}^*$ , доставляющих на решениях модели (2.20) минимум аддитивному функционалу (3.104). В качестве

множества допустимых значений параметров  $k_\varphi^*$  и  $k_{\dot{\varphi}}^*$  рекомендуется выбирать область устойчивости замкнутой системы в плоскости варьируемых параметров  $(k_\varphi^*, k_{\dot{\varphi}}^*)$ , методика построения которой изложена в разделе 2.6.

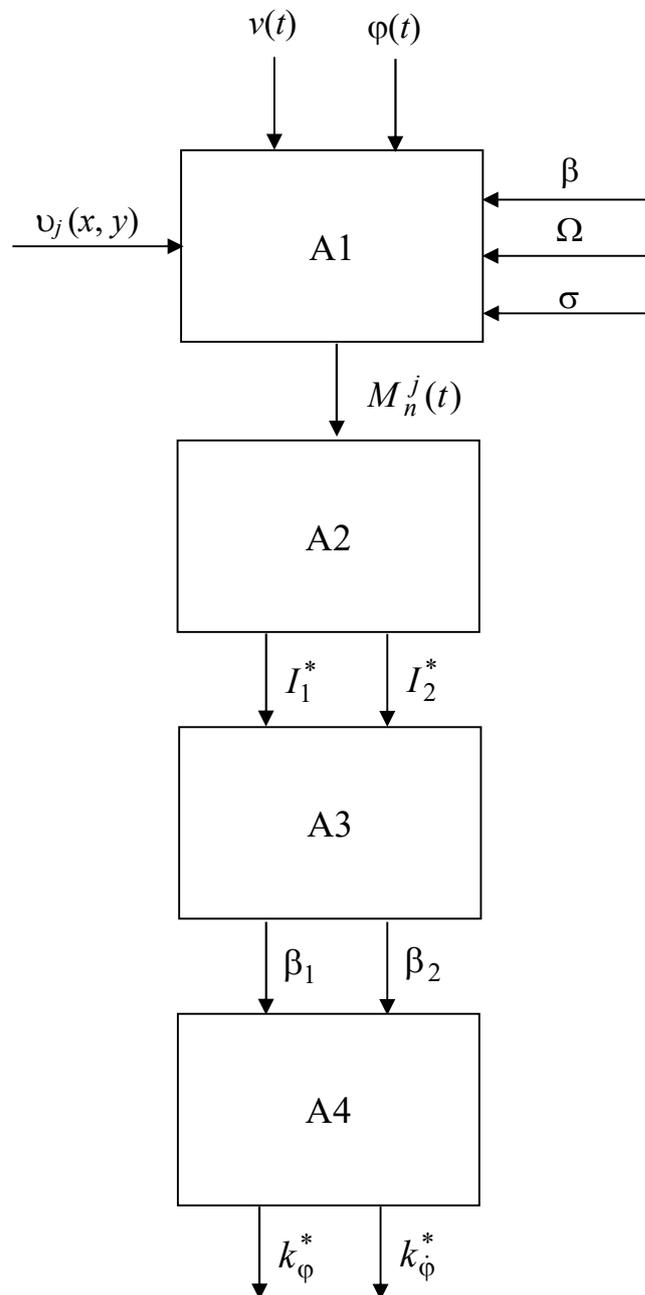
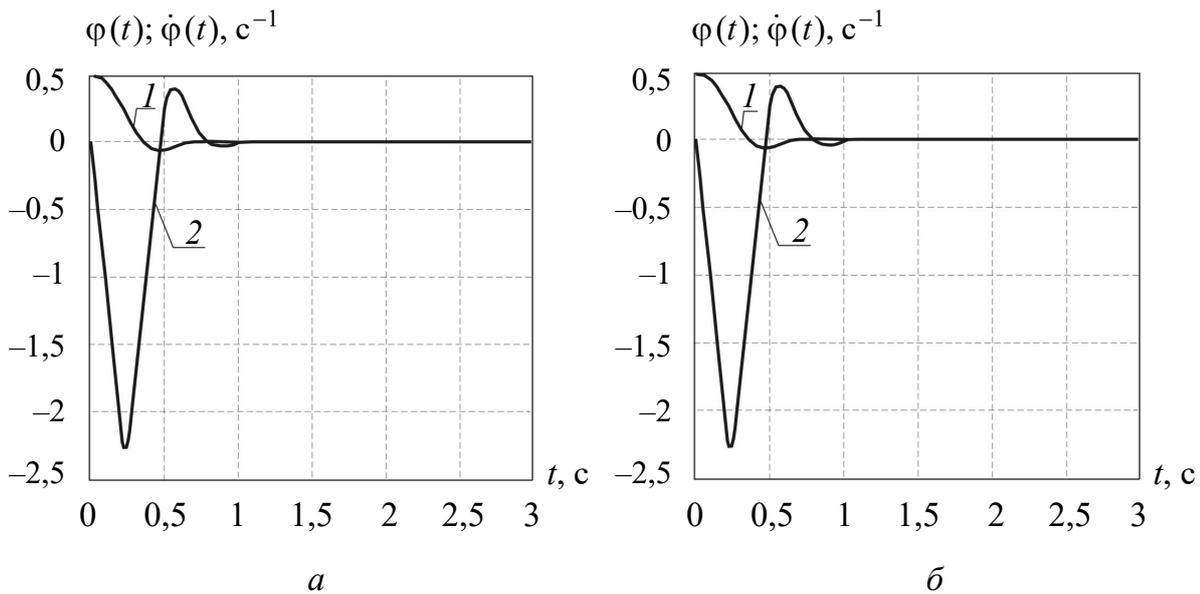


Рис. 3.4. Структурно-логическая схема алгоритма решения задачи параметрического синтеза

Использование описанного выше алгоритма параметрического синтеза приводит к выводу о том, что оптимальные значения варьируемых параметров  $k_{\varphi}^*$  и  $k_{\dot{\varphi}}^*$  практически не изменяются при движении танка по различным грунтам и с различными скоростями и составляют  $k_{\varphi}^* = 249$ ;  $k_{\dot{\varphi}}^* = 125$ . При этих значениях варьируемых параметров процессы наведения и стабилизации приведены на рис. 3.5. Время наведения при  $x_1(0) = 0,5$  раз не превышает 1 с, максимальное значение условий скорости поворота пушки в процессе наведения достигает  $x_{2\max} = 2,3 \text{ с}^{-1}$ , а значение аддитивного функционала (3.104) при  $\beta_1 = 0,33$  и  $\beta_2 = 0,835$  составляет  $I^* = 0,6475 \text{ с}$  в предположении движения танка по асфальтобетону.



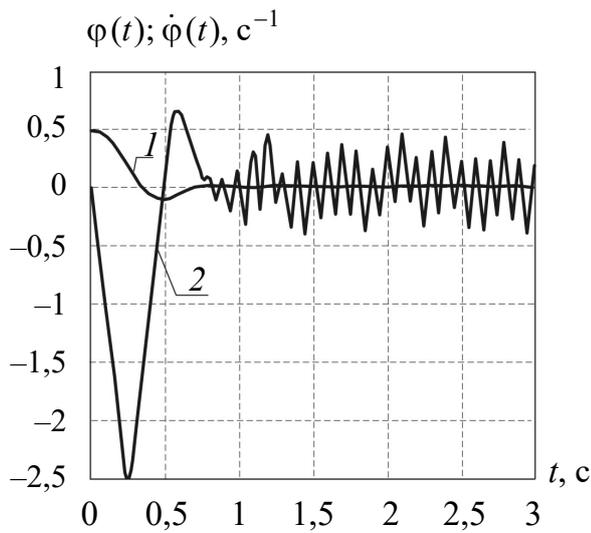


Рис. 3.5. Процессы наведения и стабилизации в замкнутой системе (2.20)

при  $k_{\varphi}^* = 249$ ,  $k_{\dot{\varphi}}^* = 125$ :

1 –  $\varphi(t)$ ; 2 –  $\dot{\varphi}(t)$ ;

*a* –  $T = 0,005$  с; *б* –  $T = 0,01$  с;

*в* –  $T = 0,05$  с

в

### 3.7. Параметрический синтез инвариантных динамических систем

Центральной проблемой современной теории управления является создание систем автоматического управления способных эффективно функционировать в условиях неопределенности значений параметров системы, а также в условиях широкого спектра внешних возмущений, действующих на систему [41].

Понятия «инвариантность» и «робастность» тесно взаимосвязаны друг с другом. В самом деле, под инвариантностью системы автоматического управления понимают ее низкую чувствительность к изменению внешних возмущений, действующих на объект управления.

Под робастностью системы автоматического управления понимают ее низкую чувствительность к изменению параметров объекта управления, или, образно говоря, к изменению внутренних возмущений, действующих на объект.

Идея создания инвариантного стабилизатора танковой пушки изложена в работах [42, 43]. Дальнейшее развития этой идеи нашло воплощение в создании стабилизатора башни танка Т-64Б с датчиком линейных ускорений танковой башни относительно соотношений поперечной оси. Действительно, если танковая пушка статически уравновешена относительно оси цапф, то танковая башня с пушкой неуравновешенна относительно оси поворота. Поэтому составляющая линейного ускорения, возникающая при повороте танка и направленная вдоль собственной поперечной оси башни, вызывает создание возмущающего момента относи-

тельно оси поворота башни, который уводит башню с пушкой от заданного наводкой направления.

Если алгоритм стабилизации танковой башни получает информацию о линейном ускорении башни относительно ее поперечной оси, то стабилизатор танковой башни начинает формировать стабилизирующий момент еще до начала поворота башни, т. е. до появления сигналов на выходах датчиков угла поворота и угловой скорости поворота, что повышает точность и быстродействие замкнутой системы стабилизации и придает системе свойство инвариантности к действию внешних возмущений. В инвариантной системе стабилизации объединены два известных принципа регулирования – принцип регулирования по отклонению и принцип регулирования по возмущению. При такой комбинации двух принципов точность стабилизации оси канала ствола танковой пушки значительно возрастает.

В канале вертикального наведения угол возвышения пушки обычно невелик, так как танк ведет огонь по цели, находящейся в пределах прямой видимости. Поэтому внешнее возмущение от центробежной силы при повороте, действующей на танковую пушку в канале вертикального наведения, незначительно. При ведении танком боевых действий в условиях горной местности и, как следствие, при больших углах возвышения пушки влияние центробежных сил на ствол, вызванных поворотом корпуса танка, существенно возрастает. Это обстоятельство приводит к выводу о целесообразности использования инвариантного стабилизатора и в канале вертикального наведения.

Структурная схема инвариантного стабилизатора танковой пушки в канале вертикального наведения приведена на рис. 3.6. От штатного стабилизатора, структурная схема которого представлена на рис. 1.1, предлагаемый инвариантный стабилизатор [44] отличается наличием датчиков давления рабочей жидкости в плоскостях исполнительного гидроцилиндра 6 и 7. Момент внешних возмущений  $M_n(t)$ , приложенный к танковой пушке, передается на поршень исполнительного гидроцилиндра. При этом формируется разность давлений рабочей жидкости

$$\Delta p(t) = p_1(t) - p_2(t),$$

фиксируемая датчиками 6 и 7 практически мгновенно, до того, как возникает угловое отклонение оси канала ствола  $\varphi(t)$  от направления на цель и появляется угловая скорость поворота  $\dot{\varphi}(t)$ . Если алгоритм стабилизации в канале вертикального наведения сформировать в виде

$$\sigma_{\varphi}(t) = k_{\varphi} k_{\Gamma} \varphi(t) + k_{\dot{\varphi}} k_c \dot{\varphi}(t) + k_p k_d \Delta p(t), \quad (3.107)$$

где  $k_d$  – коэффициент усиления датчика давления;  $k_p$  – варьируемый коэффициент стабилизатора по каналу давления рабочей жидкости.

Пренебрежем нелинейностью статической характеристики электронного блока в малой окрестности состояния установившегося равновесия, т. е. будем полагать  $U_y(t) = \sigma_\varphi(t)$ . Тогда с учетом соотношения (1.57) математическая модель замкнутой инвариантной системы стабилизации может быть получена из системы (1.82)

$$I_n \ddot{\varphi}(t) = k_m \Delta p(t) + M_n(t); \quad (3.107)$$

$$I_k \Delta \ddot{p}(t) + f \Delta \dot{p}(t) + c \Delta p(t) = -\frac{k_c k_d}{r_0} [k_\varphi k_r \varphi(t) + k_\dot{\varphi} k_c \dot{\varphi}(t) + k_p k_d \Delta p(t)]. \quad (3.108)$$

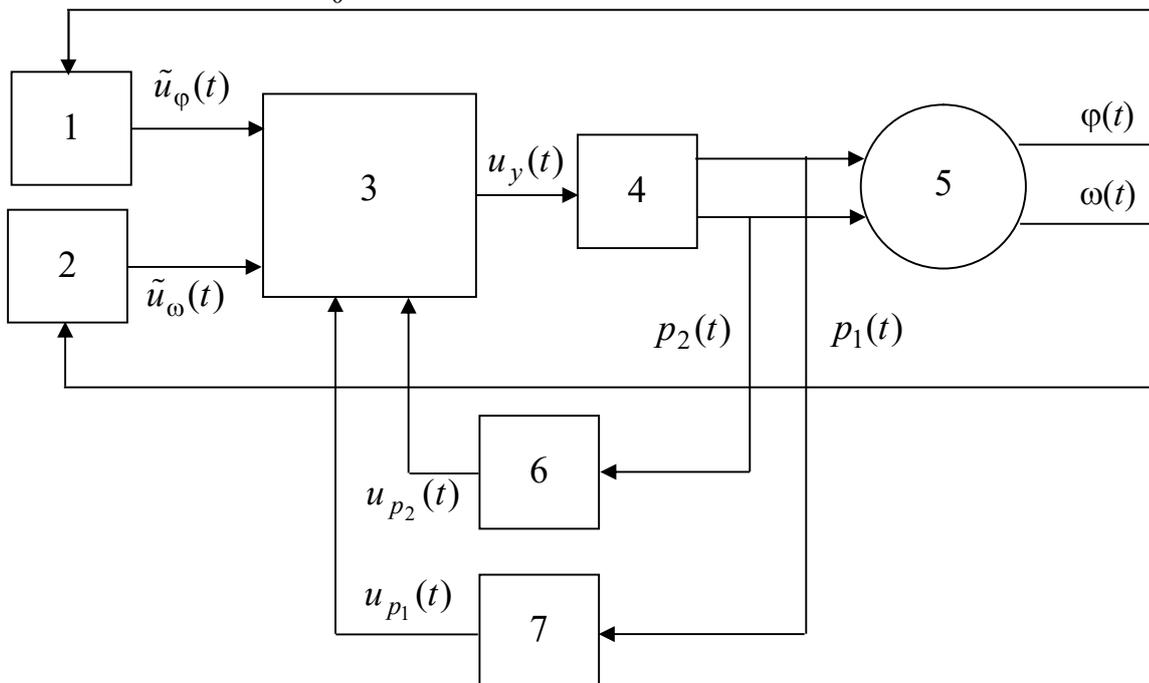


Рис. 3.6. Структурная схема инвариантной системы наведения и оптимизации танковой пушки

Передаточная функция объекта стабилизации записывается в виде

$$W_0(s) = \frac{L\{\varphi(t)\}}{L\{\Delta p(t)\}} = \frac{k_n}{s^2}, \quad (3.109)$$

где коэффициент  $k_n = \frac{k_m}{I_n}$ .

Передаточная функция стабилизатора может быть представлена следующим соотношением

$$W_c(s) = \frac{L\{\Delta p(t)\}}{L\{\varphi(t)\}} = \frac{k_y(k_\varphi k_\Gamma + k_\dot{\varphi} k_c s)}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1 + k_p k_d k_y}, \quad (3.110)$$

где

$$k_y = -\frac{k_c k_D}{c r_0}; \quad T_1^2 = \frac{I_k}{c}; \quad T_2 = \frac{f}{c}.$$

Тогда передаточная функция разомкнутой системы стабилизации равна произведению передаточных функций (3.119) и (3.110) [45]

$$W_p(s) = \frac{k_n k_y (k_\varphi k_\Gamma + k_\dot{\varphi} k_c s)}{s^2 (T_1^2 s^2 + T_2 s + 1 + k_p k_d k_y)}. \quad (3.111)$$

Из рассмотрения соотношения (3.111) следует, что рассматриваемая система обладает астатизмом второго порядка, следовательно, имеет свойство инвариантности второго порядка, т. е. первые два коэффициента ошибок такой системы равны нулю. Если положить

$$1 + k_p k_d k_y = 0, \quad (3.112)$$

то порядок астатизма системы может быть повышен до трех. Действительно, выполнение соотношения (3.112) приводят к передаточной функции разомкнутой системы вида

$$W_p(s) = \frac{k_n k_y (k_\varphi k_\Gamma + k_\dot{\varphi} k_c s)}{s^3 (T_1^2 s + T_2)}. \quad (3.113)$$

При этом замкнутая система получает свойства инвариантности третьего порядка, в которой обращаются в нуль первые три коэффициента ошибок [45].

В соответствии с условием (3.112) значение варьируемого параметра  $k_p$  определяется соотношением

$$k_p = -\frac{1}{k_d k_y}. \quad (3.114)$$

Положим, что значение коэффициента усиления датчика давления составляет  $k_d = 1 \cdot 10^{-6} \text{ В} \cdot \text{Па}^{-1}$ . Тогда значение варьируемого коэффициента усиления  $k_p$  рассматриваемого стабилизатора составляет

$$k_p^* = 0,736.$$

Предположим, что внешнее возмущение, действующее на танковую пушку, представляется в виде

$$M_n(t) = \begin{cases} 200 \cdot t & \text{при } 0 \leq t < 1; \\ 200 & \text{при } 1 \leq t < 3; \\ 200 - 200(t - 3) & \text{при } 3 \leq t < 4; \\ 0 & \text{при } t \geq 4. \end{cases} \quad (3.115)$$

График, соответствующий соотношению (3.115) представлен на рис. 3.7.

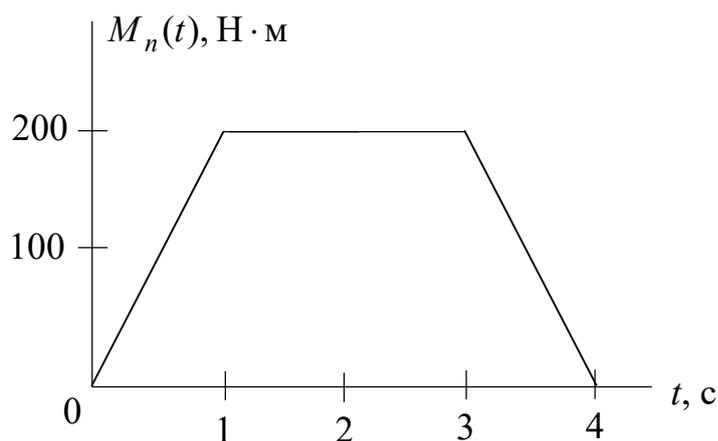


Рис. 3.7. Зависимость внешнего возмущения  $M_n(t)$  от времени

На рис. 3.8 представлена зависимость функционала (3.57), вычисленного на решениях системы (3.107), (3.108) при  $k_\phi^* = 124,5$ ;  $k_\phi^* = 50$  при внешнем возмущении (3.115) для различных значений параметра  $k_p$ . Минимальное значение функционала (3.57) соответствует значению  $k_\phi^* = 0,736$ .

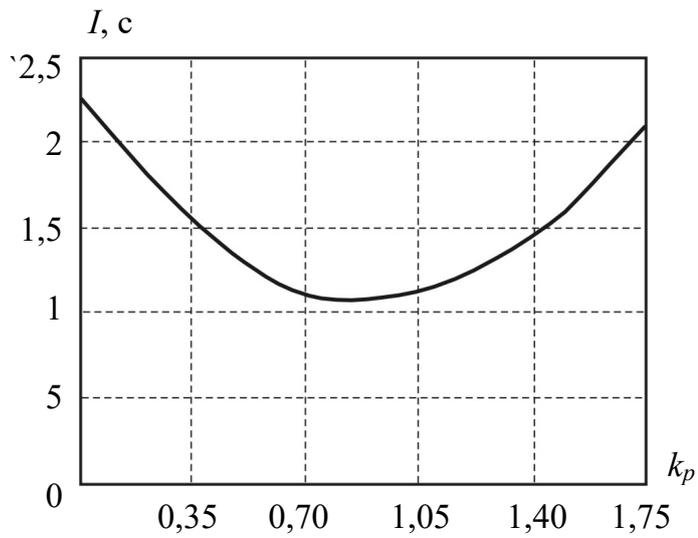
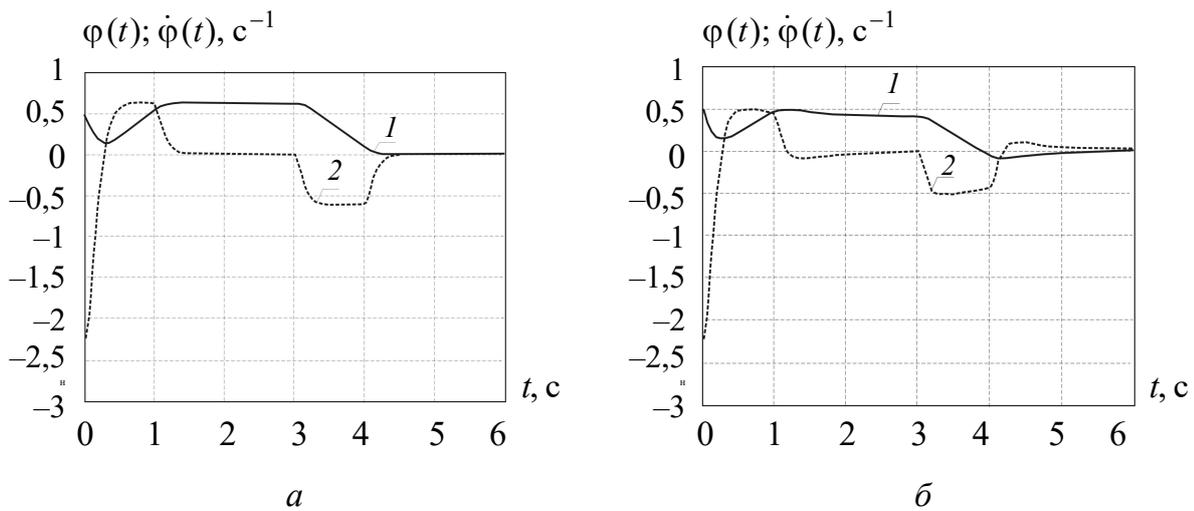


Рис. 3.8. Зависимость функционала (3.57) от значения коэффициента  $k_p$

На рис. 3.9 приведены процессы обработки внешнего возмущения (3.115) при различных значениях варьируемого параметра  $k_p$ .



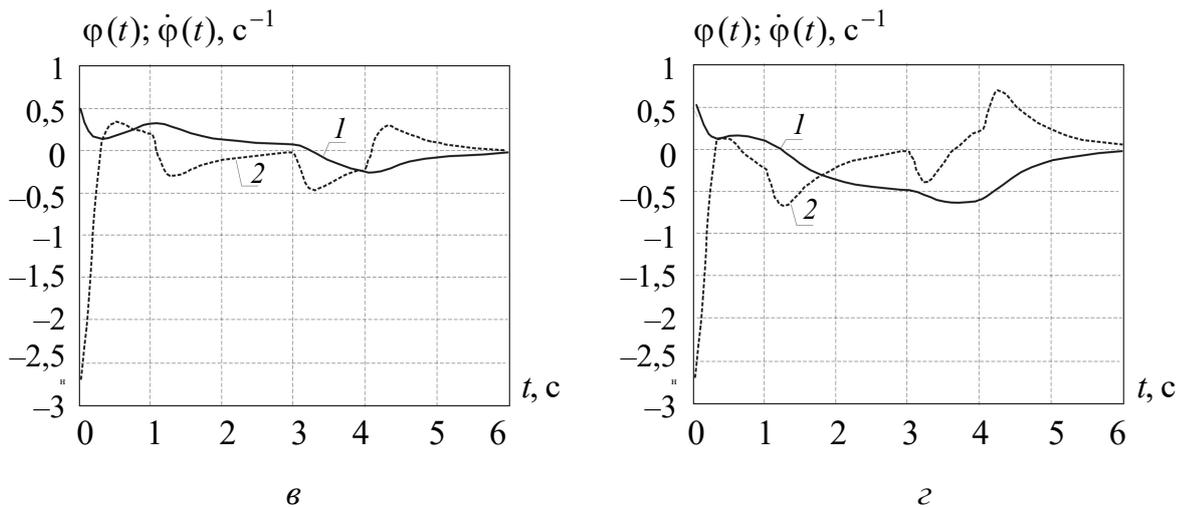


Рис. 3.9. Процессы отработки внешнего возмущения:

$$1 - \varphi(t); 2 - \dot{\varphi}(t); a - k_p = 0; \quad b - k_p = 0,3;$$

$$в - k_p = 0,736; \quad z - k_p = 1,2$$

Рассмотрим характеристическое уравнение замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки

$$1 + W_p(s) = T_1^2 s^4 + T_2 s^3 + (1 + k_p k_d k_y) s^2 + k_n k_y k_\varphi k_c s + k_n k_y k_\varphi k_r = 0. \quad (3.116)$$

При выполнении условия (3.112) коэффициент при  $s^2$  характеристического уравнения (3.116) становится равным нулю. Это свидетельствует о том, что рабочая точка системы выходит на границу области устойчивости, то есть между свойством инвариантности и устойчивостью замкнутой системы существует противоречие, заключающееся в том, что повышение степени инвариантности системы приводит к снижению запаса устойчивости. Это противоречие может быть устранено путем компромисса между порядком инвариантности и запасом устойчивости замкнутой системы.

### 3.8. Параметрический синтез робастных динамических систем

В процессе эксплуатации любой технической системы значения ее параметров в той или иной мере отклоняются от своих номинальных значений, что приводит к изменению динамических характеристик системы. Техническую систему будем называть робастной, если отклонения ее па-

раметров от своих номинальных значений не приводят к существенному изменению ее динамических характеристик. С понятием робастности технической системы тесно связано понятие чувствительности системы к изменению ее параметров, иными словами, система является робастной, если она обладает малой чувствительностью к изменению своих конструктивных параметров.

Так, например, варьируемыми параметрами системы наведения и стабилизации танковой пушки являются константы алгоритма стабилизации  $k_\varphi$  и  $k_{\dot{\varphi}}$ , оптимальные значения которых  $k_\varphi^*$  и  $k_{\dot{\varphi}}^*$ , равные  $k_\varphi^* = 249$  и  $k_{\dot{\varphi}} = 125$ , получены в результате применения к системе (2.30) и функционалу (3.104) алгоритма параметрического синтеза, описанного в разделе 3.6, при номинальных значениях конструктивных параметров системы (2.20). Вместе с тем, значения коэффициента вязкости рабочей жидкости гидросистемы стабилизатора канала вертикального наведения изменяется в широком диапазоне в зависимости от температуры окружающей среды, которая может изменяться в интервале  $(-40 \div +50)^\circ\text{C}$ . Поэтому значения варьируемых параметров стабилизатора  $k_\varphi^*$  и  $k_{\dot{\varphi}}^*$ , оптимальные для номинальной температуры  $+10^\circ\text{C}$ , не являются таковыми для других значений температуры окружающей среды, что неизбежно приводит к снижению точности стабилизации оси канала ствола танковой пушки относительно линии прицеливания.

В основу предлагаемой методики построения робастной динамической системы положены следующие рассуждения [46,47]. Функционал, вычисленный на решениях математической модели динамической системы

$$\dot{X}(t) = \Phi[X(t), \alpha, \beta] + F(t), \quad (3.117)$$

где  $\alpha$  –  $s$ -мерный вектор варьируемых параметров;  $\beta$  – нестабильный параметр динамической системы, обозначим через

$$I(\alpha, \beta) = \underset{(j=1, N)}{M} \left\{ \int_0^T \langle X^j(t, \alpha, \beta), Q X^j(t, \alpha, \beta) \rangle dt \right\}, \quad (3.118)$$

причем  $X^j(t, \alpha, \beta)$  – решение системы (3.117), соответствующее  $j$ -й реализации вектора  $F(t)$ .

Чувствительность критерия оптимальности (3.118) к изменению неустойчивого параметра  $\beta$  оценим производной

$$\left| \left[ \frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right]_{\beta=\beta_0} \right|, \quad (3.119)$$

где  $\beta_0$  – номинальное значение неустойчивого параметра.

Вектор варьируемых параметров  $\alpha \in G_\alpha$  выбирается из условия минимума аддитивного функционала

$$I(t) = \gamma_1^2 I(\alpha, \beta_0) + \gamma_2^2 \left| \left[ \frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right]_{\beta=\beta_0} \right|, \quad (3.120)$$

где весовые коэффициенты  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  выбираются согласно методике, описанной в разделе 3.5, а производная (3.119) вычисляется по формуле

$$\left[ \frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right]_{\beta=\beta_0} = \left[ \frac{-I(\alpha, \beta - \delta\beta)}{2\delta\beta} \right]_{\beta=\beta_0},$$

где  $\delta\beta$  – вариация неустойчивого параметра  $\beta$ .

Для наглядной иллюстрации изложенной методики параметрического синтеза робастной системы наведения и стабилизации танковой пушки рассмотрим математическую модель (2.3)–(2.5). При этом собственное возмущенное движение системы описывается моделью, получаемой из модели (2.3)–(2.5) при  $M_n(t) = 0$

$$I_n \ddot{\varphi}(t) = -k_m k_d \beta(t); \quad (3.121)$$

$$I_k \ddot{\beta}(t) + f \dot{\beta}(t) + c \beta(t) = \frac{k_e}{r_0} U_y(t); \quad (3.122)$$

$$U_y(t) = k_\varphi k_\Gamma \varphi(t) + k_{\ddot{\varphi}} k_c \dot{\varphi}(t). \quad (3.123)$$

При подстановке (3.123) в правую часть (3.122) получаем математическую модель собственного возмущенного движения замкнутой системы стабилизации

$$I_n \ddot{\varphi}(t) = -k_m k_d \beta(t);$$

$$I_k \ddot{\beta}(t) + f \dot{\beta}(t) + c \beta(t) = \frac{k_e}{r_0} [k_\varphi k_r \varphi(t) + k_\dot{\varphi} k_c \dot{\varphi}(t)]. \quad (3.124)$$

Обе части второго уравнения (3.124) разделены на  $c$

$$\frac{I_k}{c} \ddot{\beta}(t) + \frac{f}{c} \dot{\beta}(t) + \beta(t) = \frac{k_e}{c r_0} [k_\varphi k_r \varphi(t) + k_\dot{\varphi} k_c \dot{\varphi}(t)]. \quad (3.125)$$

С учетом обозначений

$$T_1^2 = \frac{I_k}{c}; \quad T_2 = \frac{f}{c}$$

уравнение (3.125) записывается в виде

$$T_1^2 \ddot{\beta}(t) + T_2 \dot{\beta}(t) + \beta(t) = \frac{k_e}{c r_0} [k_\varphi k_r \varphi(t) + k_\dot{\varphi} k_c \dot{\varphi}(t)] \quad (3.126)$$

разрешим первое уравнение (3.124) и уравнение (3.126) относительно старших произведенных

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{k_m k_d}{I_n} \beta(t);$$

$$\ddot{\beta}(t) = -\frac{1}{T_1^2} \beta(t) - \frac{T_2}{T_1^2} \dot{\beta}(t) + \frac{k_c k_r}{c r_0 T_1^2} k_\varphi \varphi(t) + \frac{k_e k_c}{c r_0 T_1^2} k_\dot{\varphi} \dot{\varphi}(t). \quad (3.127)$$

Введем в рассмотрение вектор состояния замкнутой системы (3.127)

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \\ \beta(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{bmatrix}.$$

Тогда систему (3.127) можно представить в нормальной форме

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\
\dot{x}_2(t) &= -\frac{k_M k_D}{I_n} x_3(t); \\
\dot{x}_3(t) &= x_4(t); \\
\dot{x}_4(t) &= \frac{k_e k_r}{c r_0 T_1^2} k_\varphi x_1(t) + \frac{k_e k_c}{c r_0 T_1^2} k_\dot{\varphi} x_2(t) - \frac{1}{T_1^2} x_3(t) - \frac{T_2}{T_1^2} x_4(t).
\end{aligned} \tag{3.128}$$

Нестабильным параметром в рассматриваемой системе является коэффициент жидкостного трения  $f$ , величина которого существенно зависит от температуры окружающей среды. От значения коэффициента  $f$  зависит значение постоянной времени  $T_2$ . В системе (3.101) выделим постоянную времени  $T_2$ . В результате получаем

$$\begin{aligned}
2 \cdot 10^3 k_\varphi k_{14} + 1 &= 0; \\
k_{11} + 0,2 \cdot 10^3 k_\dot{\varphi} k_{14} + 10^3 k_\varphi k_{24} &= 0; \\
-10 k_{12} - 10^4 k_{14} + 10^3 k_\varphi k_{34} &= 0; \\
k_{13} - 10^4 T_2 k_{14} + 10^3 k_\varphi k_{44} &= 0; \\
k_{12} + 0,2 \cdot 10^3 k_\dot{\varphi} k_{24} &= 0; \\
-10 k_{22} - 10^4 k_{24} + k_{13} + 0,2 \cdot 10^3 k_\dot{\varphi} k_{34} &= 0; \\
k_{23} - 10^4 T_2 k_{24} + k_{14} + 0,2 \cdot 10^3 k_\dot{\varphi} k_{44} &= 0; \\
-10 k_{23} - 10^4 k_{34} &= 0; \\
k_{33} - 10^4 T_2 k_{34} - 10 k_{24} - 10^4 k_{44} &= 0; \\
k_{34} - 10^4 T_2 k_{44} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.129}$$

Из системы алгебраических уравнений (3.129) получаем

$$k_{11}(k_\varphi, k_\dot{\varphi}, T_2) = \frac{k_\dot{\varphi}}{k_\varphi} + \frac{10^3 k_\dot{\varphi} + 0,5 \cdot 10^3 T_2 k_\varphi - 5 \cdot 10^6 T_2}{40 k_\varphi^2 - 0,2 \cdot 10^6 T_2 k_\dot{\varphi} + 10^5 T_2^2 k_\varphi}. \tag{3.130}$$

Чувствительность функции (3.130) к изменению неустойчивого параметра (3.130) будем оценивать функцией чувствительности

$$S(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}, T_2) = \left| \frac{\partial k_{11}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}, T_2)}{\partial T_2} \right| = \frac{\left| \begin{aligned} &(-0,5 \cdot 10^8 T_2^2 - 2 \cdot 10^8 T_2) k_\varphi^2 + \\ &+(2 \cdot 10^4 k_\varphi^2 + 0,5 \cdot 10^{12} T_2^2 + 0,5 \cdot 10^9 k_{\dot{\varphi}}) - 2 \cdot 10^8 k_{\dot{\varphi}}^2 \end{aligned} \right|}{(2,5k_\varphi - 6,25 \cdot 10^3)^2}. \quad (3.131)$$

В соотношении (3.131) положим  $T_2 = T_{20} = 0,5 \cdot 10^{-2}$  с. Используя описанный выше алгоритм параметрического синтеза, отыщем минимум функции (3.131) по  $k_\varphi$  и  $k_{\dot{\varphi}}$ . В результате получаем  $k_\varphi^* = 126$ ;  $k_{\dot{\varphi}}^* = 125$ .

Составим аддитивный функционал

$$J(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}, T_{20}) = \gamma_1^2 k_{11}(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}, T_{20}) + \gamma_2^2 |S(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}, T_{20})|. \quad (3.132)$$

В результате использования по отношению к функционалу (3.132) алгоритма параметрического синтеза, получаем  $\gamma_1^* = 0,985$ ;  $\gamma_2^* = 0,015$ ;  $k_\varphi^* = 157,42$ ;  $k_{\dot{\varphi}}^* = 125$ .

Таким образом, стабилизатор танковой пушки с полученными значениями варьируемых параметров обеспечивает компромисс между точностью и малой чувствительностью системы (3.128) к изменению параметра  $T_2$ .

### 3.9. Параметрический синтез динамических систем с переменной структурой

Обычно выбор структуры динамической системы осуществляется исходя из предположения, что совокупность функциональных элементов и характер связей между ними остаются раз и навсегда неизменными. Однако такой взгляд на проектирование технических объектов не является единственным. Действительно, при проектировании динамической системы можно заранее в структуру системы ввести такие функциональные элементы, которые во время протекания динамического процесса скачкообразно изменяют структуру динамической системы. Тогда, в зависимости от выбранного алгоритма и информации о состоянии системы, последняя будет иметь ту или иную структуру. В такой системе удастся сочетать полезные свойства каждой из имеющейся совокупности струк-

тур и получить новые свойства, не присущие каждой из структур в отдельности. Следует ожидать, что такой подход позволит существенно повысить динамические характеристики системы.

Результаты общей теории систем с переменной структурой, изложенной в работах [48, 49], кратко можно сформулировать в виде следующих тезисов:

- в классе систем с переменной структурой достигается повышение быстродействия системы по сравнению с линейной системой;
- в динамических системах с переменной структурой имеют место два режима работы – движение по фазовым траекториям и движение по поверхностям переключения, причем режим движения по поверхности переключения с бесконечно большой частотой переключения структуры, называется скользящим режимом;
- при работе динамической системы с переменной структурой в скользящем режиме система приобретает свойство инвариантности к действию внешних возмущений и свойство робастности к изменению значений нестабильных параметров.

Указанные свойства динамических систем с переменной структурой определяет их привлекательность для использования в стабилизаторах танковой пушки [50].

Рассмотрим математическую модель замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки (3.128). Будем предполагать, что значения варьируемых параметров  $k_\varphi$  и  $k_{\dot{\varphi}}$  изменяются в соответствии с алгоритмом

$$k_\varphi = \bar{k}_\varphi \operatorname{sign}[x_1(t) S(t)]; \quad (3.133)$$

$$k_{\dot{\varphi}} = \bar{k}_{\dot{\varphi}} \operatorname{sign}[x_2(t) S(t)], \quad (3.134)$$

причем

$$S(t) = x_2(t) + \lambda x_1(t). \quad (3.135)$$

В качестве варьируемых параметров замкнутой системы (3.128), (3.133)–(3.135) выберем  $\bar{k}_\varphi$ ,  $\bar{k}_{\dot{\varphi}}$  и  $\lambda$ . Использование алгоритма параметрического синтеза, изложенного в разделе 3.6, приводит к следующим оптимальным значениям этих параметров:  $\bar{k}_\varphi^* = 150$ ;  $\bar{k}_{\dot{\varphi}}^* = -36$ ;  $\lambda^* = 5,54 \text{ с}^{-1}$ .

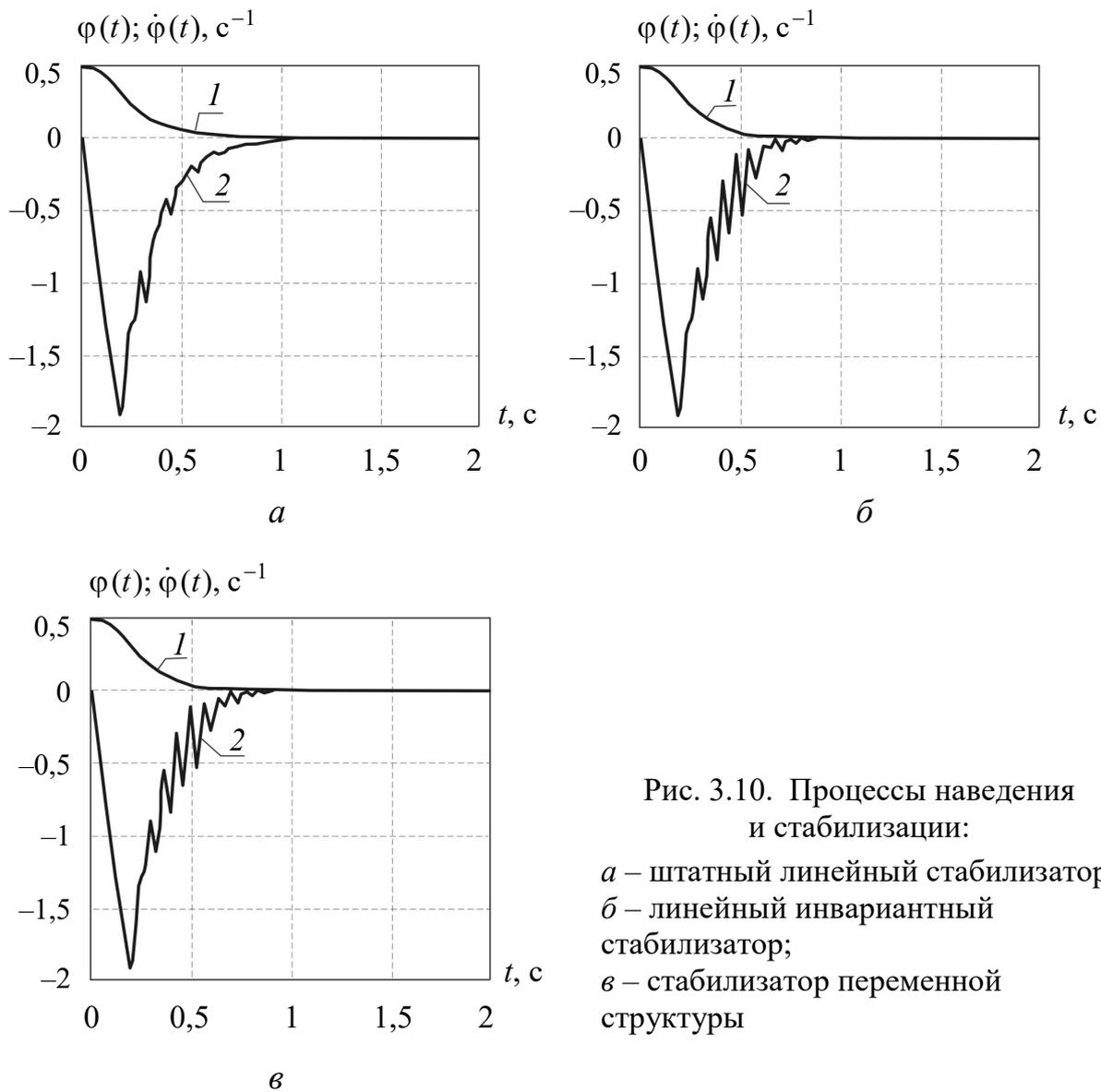


Рис. 3.10. Процессы наведения и стабилизации:  
*a* – штатный линейный стабилизатор;  
*б* – линейный инвариантный стабилизатор;  
*в* – стабилизатор переменной структуры

Процессы наведения и стабилизации в замкнутой динамической системе с переменной структурой приведены на рис. 3.10. Стабилизатор переменной структуры обеспечивает аperiodический характер процессов наведения. Быстродействие стабилизатора переменной структуры практически не отличается от быстродействия линейного пропорционального дифференциального стабилизатора при оптимальных значениях варьируемых параметров  $k_{\varphi}^* = 249$ ;  $k_{\dot{\varphi}}^* = 125$ , однако максимальное значение угловой скорости поворота пушки для стабилизатора переменной струк-

туры при  $x_1(0) = 0,5$  раз не превышает величины  $x_{2\max} = 1,8 \text{ с}^{-1}$ , а значение функционала (3.104) при движении танка по асфальтобетону составляет  $I = 0,3845 \text{ с}$ .

## **Глава 4.**

# **АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЦИФРОВЫМИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМИ МАШИНАМИ**

### **4.1. Динамические системы с цифровыми вычислительными машинами**

В настоящее время большинство сложных технических объектов оснащено цифровыми вычислительными машинами, осуществляющими функции мониторинга технического состояния объектов или управления ими. В первом случае соответствующие объекты представляют собой разомкнутые динамические системы, а во втором случае они являются замкнутыми динамическими системами. Обобщенная структурная схема замкнутой динамической системы с цифровой вычислительной машиной (ЦВМ) в контуре управления представлена на рис. 4.1.

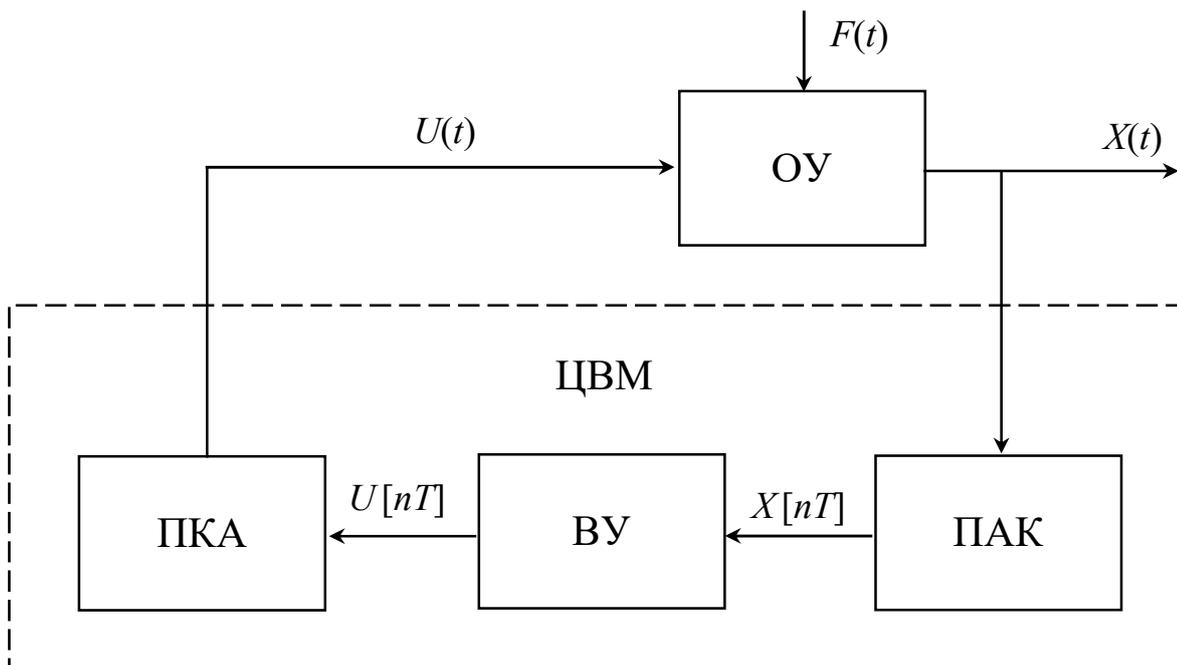


Рис. 4.1. Структурная схема замкнутой динамической системы с ЦВМ в контуре управления

На рис. 4.1 приняты следующие обозначения: ОУ – объект управления; ПАК – преобразователь «аналог – код»; ВУ – вычислительное устройство; ПКА – преобразователь «код – аналог»;  $X(t)$  – вектор состояния объекта управления;  $U(t)$  – вектор управления;  $F(t)$  – вектор внешних возмущений;  $X[nT]$  – решетчатая вектор-функция, соответствующая непрерывной вектор-функции  $X(t)$ ;  $U[nT]$  – решетчатая вектор-функция, формируемая вычислительным устройством в соответствии с некоторым алгоритмом, называемым алгоритмом управления.

Совокупность преобразователей «аналог – код», «код – аналог» и вычислительного устройства представляет собой ЦВМ.

Решетчатая функция представляет собой последовательность мгновенных импульсов, равноотстоящих друг от друга на расстоянии  $T$ , называемом периодом квантования ЭВМ, причем в каждый момент  $t = nT$  амплитуда решетчатой функции равна амплитуде соответствующей непрерывной функции (рис. 4.2).

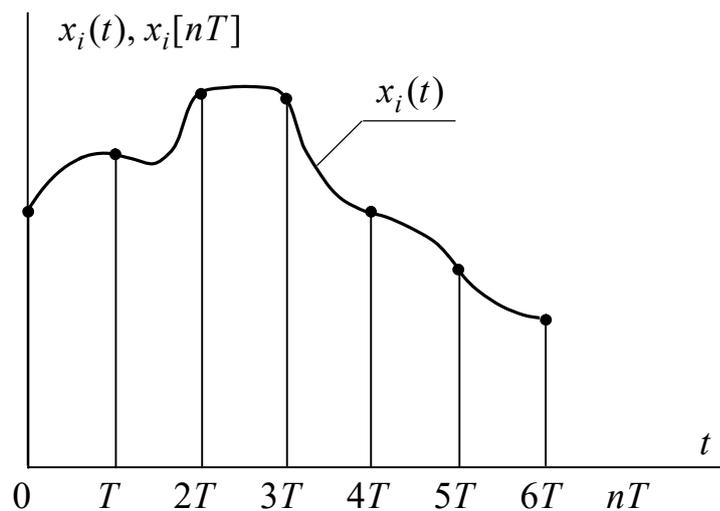


Рис. 4.2. К работе преобразователя «аналог – код»

Вычислительное устройство формирует решетчатую управляющую вектор-функцию  $U[nT]$  в соответствии с алгоритмом управления, которая поступает на вход преобразователя «код – аналог». Этот преобразователь преобразует решетчатую вектор-функцию  $U[nT]$  в кусочно-постоянную функцию управления  $U(t)$ , при этом мгновенный импульс  $U[nT]$  преобразуется в прямоугольный импульс той же самой амплитуды, которая остается постоянной на протяжении периода квантования  $T$ , т. е. до прихода на вход преобразователя следующего мгновенного импульса (рис. 4.3).

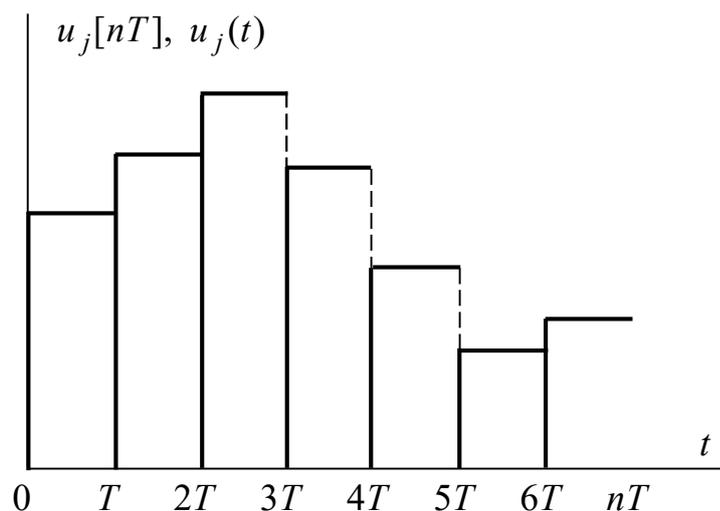


Рис. 4.3. К работе преобразователя «код – аналог»

Преобразователь «код – аналог» является сложным нелинейно-логическим устройством. Вместе с тем, в теоретических разработках этот преобразователь часто представляют в виде линейного динамического звена. В самом деле, импульсная переходная функция преобразователя «код – аналог» представляет собой прямоугольный импульс, который можно представить в виде суммы двух ступенчатых функций разной полярности сдвинутых друг относительно друга на величину периода квантования  $T$  (рис. 4.4). В связи с тем, что амплитуды входного и выходного сигналов ПКА одинаковы, то не нарушая общности можно предположить, что импульсная переходная функция ПКА представляет собой сумму двух единичных ступенчатых функций

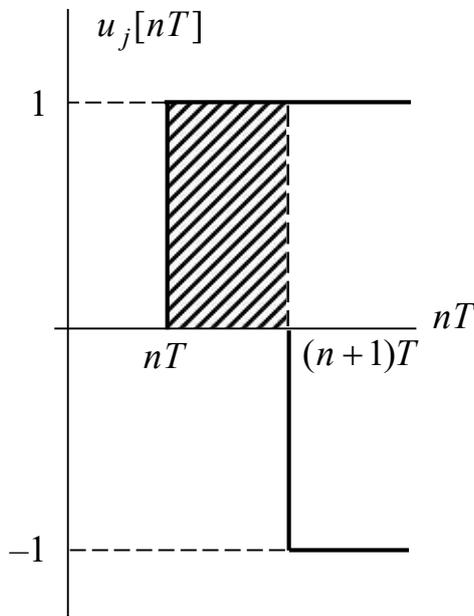


Рис. 4.4. К работе преобразователя «код – аналог»

представляет собой сумму двух единичных ступенчатых функций

$$\omega(t) = 1(t) - 1(t - T).$$

(4.1)

Применим к обеим частям формулы (4.1) операцию преобразования Лапласа

$$L\{\omega(t)\} = L\{1(t)\} - L\{1(t - T)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}. \quad (4.2)$$

Соотношение (4.2) представляет собой передаточную функцию ПКА.

Для изучения решетчатых функций методы дифференциального и интегрального исчисления непригодны, так как решетчатые функции не являются непрерывными. Однако в классе решетчатых функций можно указать дискретные аналоги производной и интеграла. Так дискретным аналогом производной есть разность решетчатой функции

$$\Delta f[nT] = \frac{f[nT] - f[(n-1)T]}{T}, \quad (4.3)$$

а дискретным аналогом интеграла – сумма

$$S[NT] = T \sum_{n=1}^N f[nT]. \quad (4.4)$$

Формула (4.3) представляет собой отношение приращения функции к приращению аргумента, что является приближенным значением производной, а формула (4.4) представляет собой соотношение для приближенного вычисления интеграла методом прямоугольников.

Для исследования динамической системы с ЦВМ, также, как и для непрерывных динамических систем, широкое распространение получим операторные методы, в частности, метод  $Z$ -преобразования, поскольку полученные с его помощью соотношения по своей структуре аналогичны соотношениям для непрерывных динамических систем при использовании преобразований Лапласа [51].

$Z$ -преобразованием решетчатой функции  $f[nT]$  называется функция комплексного переменного  $F(z)$ , которая определяется соотношением

$$Z\{f[nT]\} = F(z) = T \sum_{n=1}^N f[nT] z^{-n}. \quad (4.5)$$

Отыщем связь между комплексными переменными  $z$  и  $s$  соответственно  $Z$ -преобразования (4.5) и преобразования Лапласа

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (4.6)$$

Воспользовавшись формулой прямоугольников, запишем приближенное соотношение для вычисления интеграла (4.6).

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = T \sum_{n=0}^{\infty} f[nT] e^{-snT}. \quad (4.7)$$

Сравнение правых частей соотношений (4.5) и (4.7) позволяет записать

$$e^{-snT} = z^{-n}$$

или

$$z = e^{sT}. \quad (4.8)$$

## 4.2. Дискретная передаточная функция дискретного динамического звена

Дискретное динамическое звено представляет собой последовательное соединение непрерывной части и простейшего импульсного элемента, преобразующего непрерывный сигнал в последовательность мгновенных импульсов соответствующей амплитуды, равностоящих друг относительно друга на величину  $T$  (рис. 4.5).

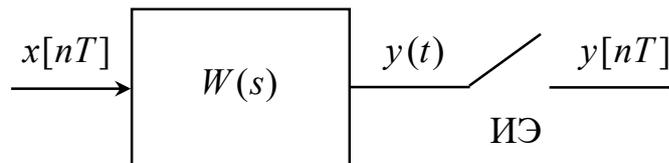


Рис. 4.5. Дискретное динамическое звено

При подаче на вход дискретного динамического звена последовательности мгновенных импульсов в виде решетчатой функции  $x[nT]$  на выходе непрерывной части звена имеет место непрерывная функция  $y(t)$ , представляющая собой сумму импульсных переходных функций непрерывной части, сдвинутых одна относительно другой на величину периода квантования  $T$ . Импульсный элемент ИЭ преобразует непрерывную функцию  $y(t)$  в решетчатую  $y[nT]$ .

Если для непрерывного динамического звена связь между входным сигналом  $x(t)$  и выходным  $y(t)$  определяется интегралом Дюамеля (2.40), то для дискретного динамического звена по аналогии имеем

$$y(t) = T \sum_{k=0}^n \omega[kT] x[(n-k)T], \quad (4.9)$$

где  $\omega[kT]$  – решетчатая функция, соответствующая импульсной переходной функции  $\omega(t)$  непрерывной части дискретного динамического звена

$$\omega(t) = L^{-1}\{W(s)\}.$$

В связи с тем, что значение решетчатой функции от отрицательного аргумента равно нулю, верхний предел суммирования в правой части (4.9) можно положить равным бесконечности

$$y[nT] = T \sum_{k=0}^{\infty} \omega[kT] x[(n-k)T]. \quad (4.10)$$

Применим операцию  $Z$ -преобразования к обеим частям соотношения (4.10)

$$Z\{y[nT]\} = Z\left\{T \sum_{k=0}^{\infty} \omega[kT] x[(n-k)T]\right\}. \quad (4.11)$$

В правой части (4.11) от  $n$  зависит только лишь решетчатая функция  $x[(n-k)T]$ , следовательно соотношение (4.11) записывается

$$Z\{y[nT]\} = T \sum_{k=0}^{\infty} \omega[kT] Z\{x[(n-k)T]\}. \quad (4.12)$$

В соответствии с определением  $Z$ -преобразования имеем

$$\begin{aligned} Z\{x[(n-k)T]\} &= T \sum_{n=0}^{\infty} x[(n-k)T] z^{-n} = \\ &= z^{-k} T \sum_{n=0}^{\infty} x[(n-k)T] z^{-(n-k)}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Введем замену  $m = n - k$ . Тогда соотношение (4.13) записывается

$$Z\{x[(n-k)T]\} = z^{-k} T \sum_{m=-k}^{\infty} x[mT] z^{-m}. \quad (4.14)$$

В связи с тем, что значения решетчатой функции от отрицательного аргумента равны нулю, нижний предел суммирования в (4.14) можно положить равным нулю. В результате получаем

$$Z\{x[(n-k)T]\} z^{-k} Z\{x[nT]\}. \quad (4.15)$$

Подставим (4.15) в (4.12)

$$Z\{y[(nT)]\} = T \sum_{k=0}^{\infty} \omega[kT] z^{-k} Z\{x[(nT)]\}. \quad (4.16)$$

Учитывая, что

$$T \sum_{k=0}^{\infty} \omega[kT] z^{-k} = Z\{\omega[(nT)]\},$$

соотношение (4.16) запишем в виде

$$Z\{y[(nT)]\} = Z\{\omega[(nT)]\} Z\{x[(nT)]\}. \quad (4.17)$$

Если передаточная функция непрерывного динамического звена представляет отношение преобразования Лапласа выходного сигнала звена к преобразованию Лапласа его входного сигнала, то дискретную передаточную функцию дискретного динамического звена определим как отношение  $Z$ -преобразования выходного сигнала звена к  $Z$ -преобразованию его входного сигнала

$$W(z) = \frac{Z\{y[(nT)]\}}{Z\{x[(nT)]\}}. \quad (4.18)$$

Подставим в формулу (4.18) соотношение (4.17). В результате получаем

$$W(z) = Z\{\omega[(nT)]\}. \quad (4.19)$$

Если для непрерывного динамического звена передаточная функция представляет собой преобразование Лапласа импульсной переходной функции звена, то для дискретного динамического звена его дискретная передаточная функция представляет собой  $Z$ -преобразование решетчатой функции  $\omega[(nT)]$ , соответствующей импульсной переходной функции непрерывной части дискретного динамического звена.

Таким образом, можно указать следующий алгоритм получения дискретной передаточной функции дискретного динамического звена:

- с помощью таблиц преобразований Лапласа находят импульсную переходную функцию непрерывной части дискретного динамического звена

$$\omega(t) = L^{-1}\{W(s)\};$$

- путем формальной замены  $t = nT$  получают решетчатую функцию  $\omega[nT]$ ;
- используя таблицы Z-преобразований в соответствии с формулой (4.19) находят дискретную передаточную функцию дискретного динамического звена.

### 4.3. Дискретная передаточная функция замкнутой динамической системы с ЦВМ

Совокупность непрерывной части замкнутой динамической системы и преобразователя «код – аналог» назовем приведенной непрерывной частью, передаточная функция которой равна произведению передаточной функции непрерывной части  $\omega_{\text{НЧ}}(s)$  и передаточной функции (4.2)

$$W_{\text{ПНЧ}}(s) = \frac{e^{-sT}}{s} W_{\text{НЧ}}(s). \quad (4.20)$$

Совокупность приведенной непрерывной части замкнутой динамической системы и преобразователя «аналог – код» представляет собой дискретное динамическое звено, непрерывная часть которого имеет передаточную функцию (4.20). Тогда замкнутую динамическую систему с ЦВМ можно представить в виде соединения с обратной связью двух дискретных динамических звеньев (рис. 4.6).

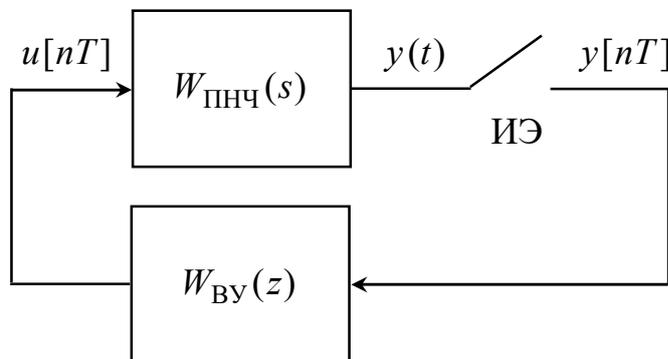


Рис. 4.6. Замкнутая дискретная система с ЦВМ

Отыщем дискретную передаточную функцию дискретного динамического звена, расположенного в прямой цепи соединения. Импульсная передаточная функция приведенной непрерывной части системы записывается

$$\begin{aligned}\omega_{\text{ПНЧ}}(t) &= L^{-1}\{W_{\text{ПНЧ}}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{W_{\text{НЧ}}(s)}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{W_{\text{НЧ}}(s)e^{-sT}}{s}\right\} = \\ &= h_{\text{НЧ}}(t) - h_{\text{НЧ}}(t - T).\end{aligned}\quad (4.21)$$

От непрерывной функции (4.21) перейдем к решетчатой функции

$$\omega_{\text{ПНЧ}}(t) = h_{\text{НЧ}}[nT] - h_{\text{НЧ}}[(n-1)T]. \quad (4.22)$$

К обеим частям соотношения (4.22) применим операцию Z-преобразования

$$\begin{aligned}W_{\text{ПНЧ}}(z) &= Z\{\omega_{\text{ПНЧ}}[nT]\} = Z\{h_{\text{НЧ}}[nT]\} - z^{-1}Z\{h_{\text{НЧ}}[nT]\} = \\ &= \frac{z-1}{z}Z\{h_{\text{НЧ}}[nT]\}.\end{aligned}\quad (4.23)$$

Тогда дискретная передаточная функция замкнутой динамической системы с ЦВМ равна

$$W(z) = \frac{W_{\text{ПНЧ}}(z)}{1 + W_{\text{ПНЧ}}(z)W_{\text{ВУ}}(z)}. \quad (4.24)$$

Таким образом, может быть указан следующий алгоритм отыскания дискретной передаточной функции замкнутой динамической системы с ЦВМ:

- с помощью таблиц преобразований Лапласа отыскивают переходную функцию непрерывной части системы

$$h_{\text{НЧ}}(t) = L^{-1}\left\{\frac{W_{\text{НЧ}}(s)}{s}\right\};$$

- путем формальной замены  $t = nT$  находят решетчатую функцию  $h_{\text{НЧ}}[nT]$ ;

- с помощью таблиц  $Z$ -преобразований находят  $Z$ -преобразование решетчатой функции  $h_{\text{ПНЧ}}[nT]$ ;
- с помощью формулы (4.23) находят дискретную передаточную функцию  $W_{\text{ПНЧ}}(z)$ ;
- с помощью формулы (4.24) находят дискретную передаточную функцию замкнутой динамической системы с ЦВМ.

#### 4.4. Устойчивость динамических систем с ЦВМ

Приравняем нулю знаменатель передаточной функции (4.21). В результате получаем характеристическое уравнение замкнутой динамической системы с ЦВМ

$$1 + W_{\text{ПНЧ}}(z) W_{\text{ВУ}}(z) = 0. \quad (4.25)$$

Непрерывная динамическая система является устойчивой, если все корни ее характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости плоскости корней. Границей области устойчивости в плоскости комплексного параметра  $s$  есть мнимая ось плоскости корней. Рассмотрим отображение мнимой оси комплексной плоскости  $s$  на комплексную плоскость  $z$  корней характеристического уравнения (4.25). Для этого в соотношении (4.8) произведем замену  $s = j\omega$

$$z = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T. \quad (4.26)$$

Модуль и аргумент комплексной величины (4.26) составляют

$$|z| = \sqrt{\cos^2 \omega T + \sin^2 \omega T} = 1;$$

$$\arg z = \arctg \frac{\sin \omega T}{\cos \omega T} = \omega T.$$

При изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности мнимая ось комплексной плоскости  $S$  отображается в окружность единичного радиуса на комплексной плоскости  $Z$ , которая представляет собой границу области устойчивости в комплексной плоскости  $z$  (рис. 4.7).

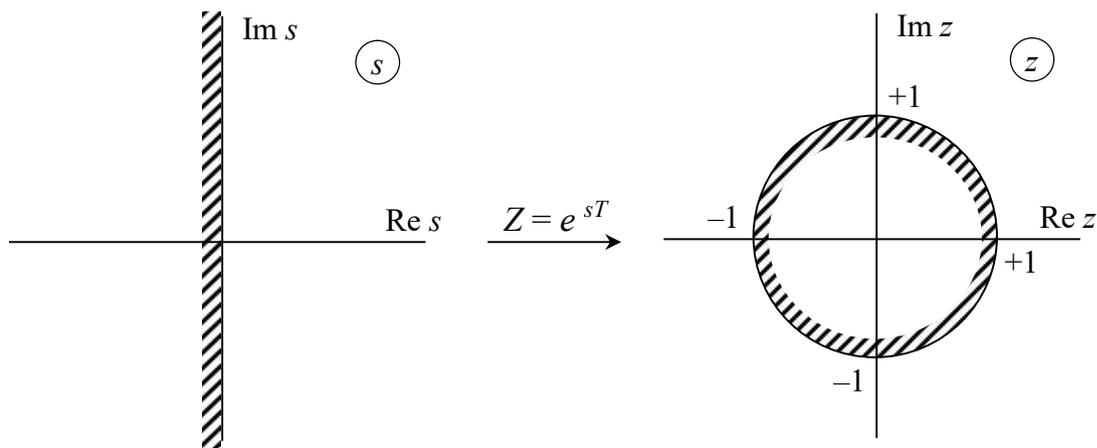


Рис. 4.7. Отображение мнимой оси плоскости  $s$  на плоскость  $z$

Критерий устойчивости Шур-Кона [51] динамических систем с ЦВМ формулируется следующим образом: динамическая система с ЦВМ является устойчивой, если все корни ее характеристического уравнения (4.25) расположены внутри окружности единичного радиуса.

Вычисление корней характеристического уравнения является весьма непростой процедурой, требующей наличия современной вычислительной техники и программных продуктов. В этой связи часто используется метод  $W$ -преобразования [51]. Из теории функций комплексного переменного известно, что с помощью билинейного преобразования

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad (4.27)$$

единичный круг в комплексной плоскости  $z$  отображается в левую часть комплексной плоскости  $w$  (рис. 4.8).

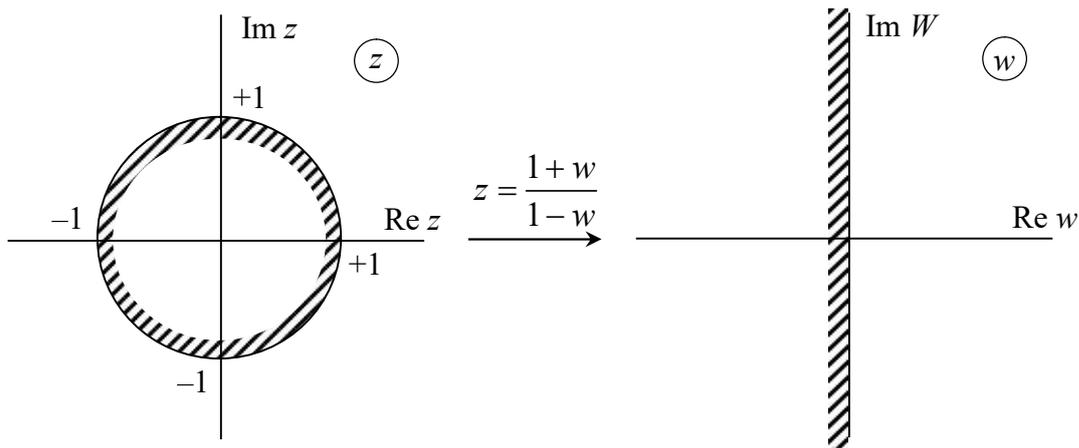


Рис. 4.8. Отображение единичного круга плоскости  $z$  на плоскость  $w$

В характеристическом уравнении (1.25) произведем замену (4.27). В результате получаем

$$1 + W_{\text{ПНЧ}} \left( \frac{1+w}{1-w} \right) W_{\text{ВУ}} \left( \frac{1+w}{1-w} \right) = 0. \quad (4.28)$$

После приведения к общему знаменателю получаем новое характеристическое уравнение того же порядка, что и уравнение (4.25). Корни этого уравнения, размещенные внутри круга единичного радиуса, соответствуют корням характеристического уравнения (4.28), размещенный в левой полуплоскости плоскости корней  $w$ . Таким образом, благодаря использованию  $W$ -преобразования, все критерии устойчивости, разработанные для анализа устойчивости непрерывных динамических систем, могут быть использованы для анализа устойчивости динамических систем с ЦВМ.

#### 4.5. Параметрический синтез динамической системы наведения и стабилизации танковой пушки

В качестве примера рассмотрим устойчивость замкнутой системы наведения, а стабилизации танковой пушки с ЦВМ, реализующей алгоритм стабилизации в виде

$$U[nT] = k_{\phi} \phi[nT] + k_{\dot{\phi}} \frac{\phi[nT] - \phi[(n-1)T]}{T}. \quad (4.29)$$

Пусть движение непрерывной части системы описывается дифференциальным уравнением (3.15). Тогда передаточная функция непрерывной части системы записывается

$$W_{\text{НЧ}}(s) = \frac{b}{s^2}; \quad (4.30)$$

а передаточная функция непрерывной части принимает вид

$$h_{\text{НЧ}}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{b}{s^3} \right\} = \frac{b}{2} t^2. \quad (4.31)$$

В (4.31) произведем формальную замену  $t = [nT]$ . В результате получаем

$$h_{\text{НЧ}}[nT] = \frac{b}{2} [nT]^2. \quad (4.32)$$

Используя таблицы  $Z$ -преобразований, запишем дискретную передаточную функцию

$$W_{\text{ПНЧ}}(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{b}{2} [nT]^2 \right\} = \frac{b}{2} \cdot \frac{T^2(z+1)}{(z-1)^2}. \quad (4.33)$$

Отыщем дискретную передаточную функцию вычислительного устройства для чего к обеим частям соотношения (4.29) применим операцию преобразования Лапласа

$$Z \{U[nT]\} = \left( k_{\phi} + \frac{k_{\dot{\phi}}}{T} - z^{-1} \frac{k_{\dot{\phi}}}{T} \right) Z \{\phi[nT]\}. \quad (4.34)$$

Из (4.34) получаем

$$W_{\text{ВУ}}(z) = \frac{Z \{U[nT]\}}{Z \{\phi[nT]\}} = k_{\phi} + \frac{k_{\dot{\phi}}}{T} - z^{-1} \frac{k_{\dot{\phi}}}{T}. \quad (4.35)$$

Тогда характеристическое уравнение замкнутой динамической системы с ЦВМ (4.25) записывается

$$1 + W_{\text{ПНЧ}}(z) W_{\text{ВУ}}(z) = 1 + \frac{b}{2} T^2 \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2} \left( k_{\phi} + \frac{k_{\dot{\phi}}}{T} - z^{-1} \frac{k_{\dot{\phi}}}{T} \right) = 0. \quad (4.36)$$

После приведения к общему знаменателю уравнение (4.36) принимает вид

$$2z^3 - [\varphi - bT^2k_\varphi - bTk_{\dot{\varphi}}]z^2 + [2 + bT^2k_\varphi]z - bTk_{\dot{\varphi}} = 0. \quad (4.37)$$

Пусть  $b = -0,25 \cdot 10^{-2} \text{ В}^{-1}\text{с}^{-2}$ ;  $T = 0,05 \text{ с}$ ;  $k_\varphi = -15 \cdot 10^3 \text{ В}$ ;  $k_{\dot{\varphi}} = -75 \cdot 10$ . Тогда уравнение (4.37) записывается

$$2z^3 - 3,81z^2 + 2,1z - 0,1 = 0. \quad (4.38)$$

В (4.38) произведем замену

$$z = \frac{1+w}{1-w}.$$

В результате получаем новое характеристическое уравнение

$$8w^3 + 7,41w^2 + 0,39w + 0,19 = 0. \quad (4.39)$$

Для оценки устойчивости динамической системы с ЦВМ и с характеристическим уравнением (4.39) воспользуемся критерием Рауса–Гурвица.

Составим матрицу Гурвица

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 7,41 & 0,19 & 0 \\ 8 & 0,39 & 0 \\ 0 & 7,41 & 0,19 \end{bmatrix}$$

и рассмотрим ее главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = 7,41 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7,41 & 0,19 \\ 8 & 0,39 \end{vmatrix} = 1,37 > 0;$$

$$\Delta_3 = 0,19\Delta_2 = 0,26 > 0.$$

Все три главные диагональные миноры матрицы Гурвица положительны, следовательно, рассматриваемая динамическая система с ЦВМ является устойчивой.

## 4.6. Синтез цифровых нерекурсивных фильтров

Преобразование непрерывных функций в решетчатые, несмотря на кажущуюся простоту, связан с большими погрешностями, в связи с тем, что преобразуемый сигнал обычно содержит высокочастотную помеху. Так, например, выходные сигналы гироскопического датчика угловой скорости, помимо полезной составляющей, содержит также составляющие высокочастотных колебаний рамок гироскопических датчиков, являющихся помехами при измерении и преобразовании полезных сигналов. Эти высокочастотные помехи снижают точность и помехозащищенность цифровых управляющих устройств.

На рис. 4.9 показаны процессы преобразования непрерывной функции в решетчатую. Из анализа этого рисунка следует, что преобразование полезной составляющей в решетчатую функцию осуществляется со значительными ошибками вследствие зашумления полезного сигнала высокочастотным шумом. Для повышения помехозащищенности динамической системы с ЦВМ обычно используют цифровые фильтры.

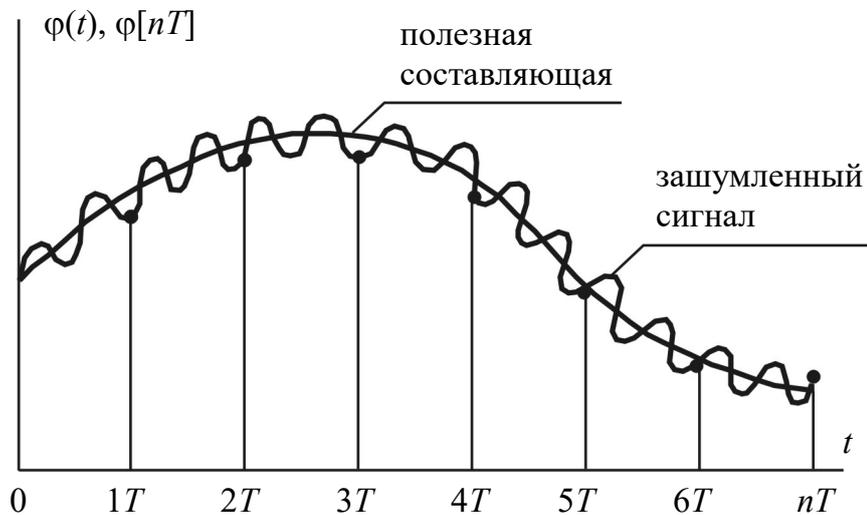


Рис. 4.9. К помехозащищенности динамической системы с ЦВМ

Общее уравнение цифрового нерекурсивного фильтра имеет следующий вид [52]:

$$y[nT] = \sum_{k=0}^m c_k x[(n-k)T], \quad (4.40)$$

где  $x[nT]$  – входной сигнал фильтра;  $y[nT]$  – выходной сигнал;  $m+1$  порядок фильтра.

К обеим частям формулы (4.40) применим операцию Z-преобразования

$$Z\{y[nT]\} = \sum_{k=0}^m c_k z^{-k} Z\{x[nT]\},$$

следовательно дискретная передаточная функция нерекурсивного фильтра записывается в виде

$$W(z) = \frac{Z\{y[nT]\}}{Z\{x[nT]\}} = \sum_{k=0}^m c_k z^{-k}. \quad (4.41)$$

В дальнейшем будем предполагать, что все синтезируемые фильтры имеют 5-й порядок, т. е. базируются на 5-ти последовательных измерениях входного сигнала в моменты времени  $nT$ ,  $(n-1)T$ ,  $(n-2)T$ ,  $(n-3)T$  и  $(n-4)T$ .

В работе проанализированы 3 возможных цифровых фильтра, построенные на линейном сглаживании 5 последних измерений.

Фильтр № 1 получен путем последовательного использования двух сглаживающих фильтров

$$g[nT] = \frac{1}{2} \{x[nT] + x[(n-1)T]\}; \quad (4.42)$$

$$y[nT] = \frac{1}{4} \{g[nT] + g[(n-1)T] + g[(n-2)T] + g[(n-3)T]\}. \quad (4.43)$$

Подставляя (4.42) в (4.43) получаем

$$y[nT] = \frac{1}{8} \left\{ x[nT] + 2x[(n-1)T] + 2x[(n-2)T] + \right. \\ \left. + 2x[(n-3)T] + x[(n-4)T] \right\}. \quad (4.44)$$

Тогда передаточная функция фильтра (4.44) принимает вид

$$W(z) = \frac{1}{8} [1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}]. \quad (4.45)$$

С учетом формулы (4.26) можно записать

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{1}{8} [1 + 2e^{-j\omega T} + 2e^{-2j\omega T} + 2e^{-3j\omega T} + 2e^{-4j\omega T}] = \\ &= \frac{1}{8} (1 + e^{-4j\omega T}) + \frac{1}{4} (e^{-j\omega T} + e^{-3j\omega T}) + \frac{1}{4} e^{-2j\omega T} = \\ &= e^{-2j\omega T} \left[ \frac{1}{8} (e^{2j\omega T} + e^{-2j\omega T}) + \frac{1}{4} (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) + \frac{1}{4} \right] = \\ &= (\cos 2\omega T - j \sin 2\omega T) \left[ \frac{1}{8} 2 \cos 2\omega T + \frac{1}{4} 2 \sin 2\omega T + \frac{1}{4} \right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Выделим (4.46) действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} W(j\omega) &= \cos 2\omega T \left[ \frac{1}{4} \cos 2\omega T + \frac{1}{2} \cos \omega T + \frac{1}{4} \right]; \\ \operatorname{Im} W(j\omega) &= -\sin 2\omega T \left[ \frac{1}{4} \cos 2\omega T + \frac{1}{2} \cos \omega T + \frac{1}{4} \right]. \end{aligned}$$

Тогда АЧХ и ФЧХ фильтра 1 принимают следующий вид

$$M(\omega) = \sqrt{[\operatorname{Re} W(j\omega)]^2 + [\operatorname{Im} W(j\omega)]^2} = \frac{1}{4} |\cos 2\omega T + 2 \cos \omega T + 1|; \quad (4.47)$$

$$\Psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} W(j\omega)}{\operatorname{Re} W(j\omega)} = \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\omega T}{\cos 2\omega T} = -2\omega T. \quad (4.48)$$

Фильтр № 2 получен в результате последовательного применения двух сглаживающих фильтров.

$$\begin{aligned} g[nT] &= \frac{1}{3} \{x[nT] + x[(n-1)T] + x[(n-2)T]\}; \\ y[nT] &= \frac{1}{3} \{g[nT] + g[(n-1)T] + g[(n-2)T]\}. \end{aligned}$$

Проводя аналогичные преобразования, получаем

$$M(\omega) = \frac{1}{9} |2\cos 2\omega T + 4\cos \omega T + 3|; \quad (4.49)$$

$$\Psi(\omega) = -2\omega T. \quad (4.50)$$

Фильтр № 3 получен осреднением 5-ти последовательных приближений входного сигнала

$$y[nT] = \frac{1}{5} \{x[nT] + x[(n-1)T] + x[(n-2)T] + \\ + \{x[(n-3)T] + x[(n-4)T]\}. \quad (4.51)$$

Путем аналогичных преобразований получаем АЧХ и ФЧХ фильтра (4.51)

$$M(\omega) = \frac{1}{5} |2\cos 2\omega T + 2\cos \omega T + 1|; \quad (4.52)$$

$$\Psi(\omega) = -2\omega T. \quad (4.53)$$

На рис. 4.10 представлены АЧХ и ФЧХ фильтров 1, 2 и 3, построенные с помощью соотношений (3.8), (3.10) и (3.13). ФЧХ всех трех фильтров одинаковые и линейно зависят от частоты входного сигнала. Анализ кривых ФЧХ позволяет сделать вывод, что сужение полосы пропускания приводит к ухудшению фильтрации высокочастотных помех.

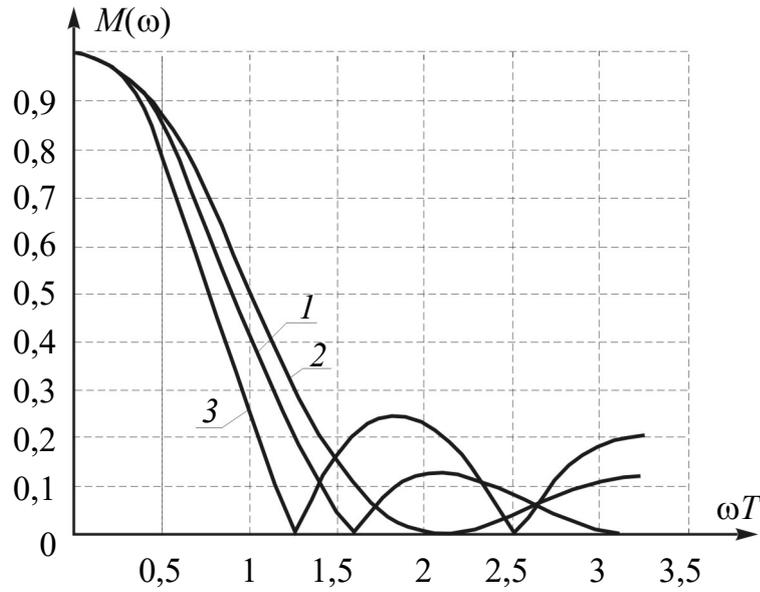


Рис. 4.10. АЧХ фильтров 1, 2 и 3

Перейдем к рассмотрению нерекурсивных фильтров, построенных на нелинейном сглаживании 5-ти последовательных измерений. На интервале  $[(n-4)T, nT]$  аппроксимируем измеряемую величину нелинейной зависимостью

$$y[iT] = A(iT)^2 + B(iT) + C. \quad (4.54)$$

На этом же интервале сформулируем функцию невязок

$$Q = \sum_{k=0}^m \left\{ A[(n-k)T]^2 + B[(n-k)T] + C - x[(n-k)T] \right\}^2. \quad (4.55)$$

Коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  выберем из условий минимума функции (4.55), которые записываются в виде:

$$\frac{\delta Q}{\delta A} = 2 \sum_{k=0}^m \left\{ A[(n-k)T]^2 + B[(n-k)T] + C - x[(n-k)T] \right\} [(n-k)T]^2 = 0;$$

$$\frac{\delta Q}{\delta B} = 2 \sum_{k=0}^m \left\{ A[(n-k)T]^2 + B[(n-k)T] + C - x[(n-k)T] \right\} [(n-k)T] = 0; \quad (4.56)$$

$$\frac{\delta Q}{\delta C} = 2 \sum_{k=0}^m \left\{ A[(n-k)T]^2 + B[(n-k)T] + C - x[(n-k)T] \right\} = 0.$$

Условия (4.56) запишем в виде системы линейных алгебраических уравнений с неизвестными  $A$ ,  $B$  и  $C$  :

$$\begin{aligned}
 & A \cdot \sum_{k=0}^m [(n-k)T]^4 + B \cdot \sum_{k=0}^m [(n-k)T]^3 + C \cdot \sum_{k=0}^m [(n-k)T]^2 = \\
 & = \sum_{k=0}^m [(n-k)T]^2 \cdot x[(n-k)T]; \\
 & A \cdot \sum_{k=0}^m [(n-k)T]^3 + B \cdot \sum_{k=0}^m [(n-k)T]^2 + C \cdot \sum_{k=0}^m [(n-k)T] = \\
 & = \sum_{k=0}^m [(n-k)T] \cdot x[(n-k)T]; \\
 & A \cdot \sum_{k=0}^m [(n-k)T]^2 + B \cdot \sum_{k=0}^m [(n-k)T] + C \cdot (m+1) = \sum_{k=0}^m x[(n-k)T].
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Пусть  $m = 4$ ;  $T = 0,004$  с. Отыскивая путем решения системы (4.57) коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  и подставляя их в соотношение (4.54), получаем уравнение фильтра № 4:

$$\begin{aligned}
 y[nT] = & \frac{1}{35} \{ -3x[(n-4)T] + 12x[(n-3)T] + \\
 & + 17x[(n-2)T] + 12x[(n-1)T] - 3x[nT] \}.
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Описанным выше способом отыщем ФЧХ фильтра (4.58)

$$M(\omega) = \frac{1}{35} | -6 \cos 2\omega T + 24 \cos \omega T + 17 |; \tag{4.59}$$

ФЧХ фильтра (4.59) имеет вид (4.50).

На рис. 4.11 приведена АЧХ фильтра 4 (кривая 1). Анализ этой кривой позволяет сделать вывод о том, что эффективность подавления высокочастотных составляющих входного сигнала у фильтра (3.19) недостаточна.

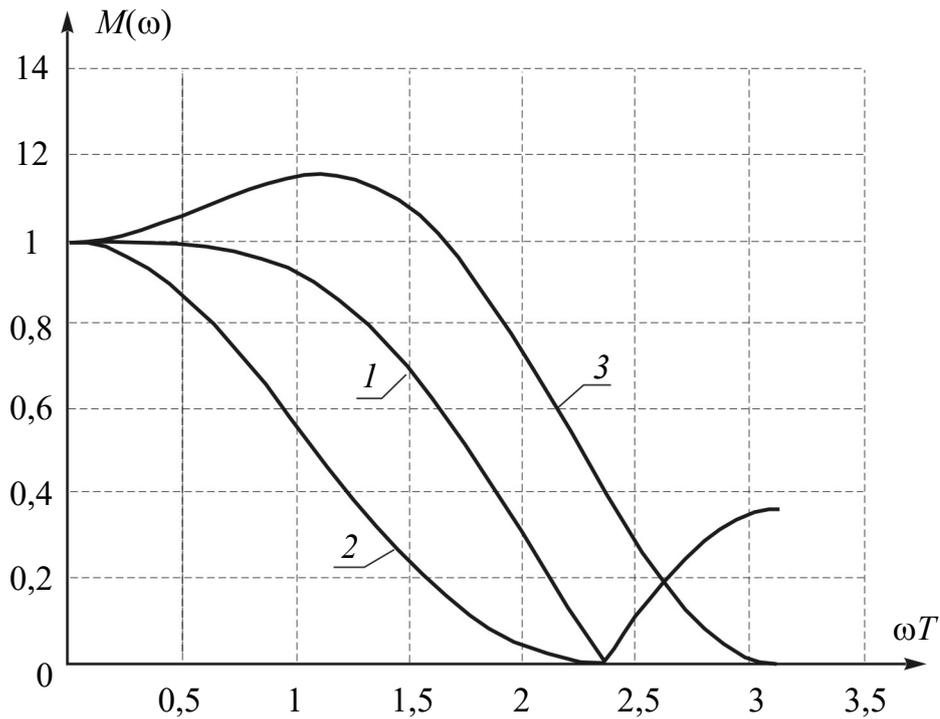


Рисунок 4.11. АЧХ фильтра 4

Рассмотрим две модификации фильтра 4.

Фильтр № 4.1 получен в результате изменения двух крайних слагаемых фильтра (4.58):

$$y[nT] = \frac{1}{48} \{ 3,5x[(n-4)T] + 12x[(n-3)T] + 17x[(n-2)T] + 12x[(n-1)T] + 3,5x[nT] \}. \quad (4.60)$$

АЧХ фильтра (4.60) записывается в виде:

$$M(\omega) = \frac{1}{48} |7 \cos 2\omega T + 24 \cos \omega T + 17| \quad (4.61)$$

и представлена на рис. 4.11 кривой 2.

Фильтр № 4.2 получен в результате изменения значения второго и четвертого слагаемых фильтра (4.58):

$$y[nT] = \frac{1}{22} \{ -3x[(n-4)T] + 5,5x[(n-3)T] + \\ + 17x[(n-2)T] + 5,5x[(n-1)T] - 3x[nT] \}. \quad (4.62)$$

АЧХ фильтра (4.62) записывается в виде соотношения:

$$M(\omega) = \frac{1}{22} | -6\cos 2\omega T + 11\cos \omega T + 17 | \quad (4.63)$$

и представлена на рис. 4.11 кривой 3.

Анализ АЧХ фильтров 4.1, 4.2 позволяет сделать вывод о том, что все эти фильтры, имеют разные полосы пропускания, тем не менее, эффективно подавляют высокочастотные составляющие входного сигнала.

Перейдем к решению проблемы синтеза низкочастотного нерекурсивного фильтра с заданными характеристиками.

Общее соотношение для расчета АЧХ цифрового низкочастотного нерекурсивного фильтра запишем в следующем виде

$$M(\omega) = | 2a \cos 2\omega T + 2b \cos \omega T + c |, \quad (4.64)$$

где коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и подлежат выбору.

В связи с тем, что синтезируемые фильтры являются низкочастотными, пропускающими низкие частоты и подавляющими высокие частоты входного сигнала, зададимся на интервале  $\omega T = 0 - \pi$  следующими условиями:

- при  $\omega T = 0$  амплитуда АЧХ должна быть равна единице

$$M(0) = 1; \quad (4.65)$$

- при  $\omega T = \pi$  амплитуда АЧХ должна быть равна нулю

$$M(\pi) = 0. \quad (4.66)$$

Условия (4.65) и (4.66) при подстановке их в соотношение (4.66) приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} 2a + 2b + c &= 1; \\ 2a - 2b + c &= 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Из уравнений (4.67) получаем

$$b = 0,25; \quad c = 0,5 - 2a. \quad (4.68)$$

Тогда соотношение (4.64) записывается в виде

$$M(\omega) = |2a \cos 2\omega T + 0,5 \cos \omega T + 0,5 - 2a|. \quad (4.69)$$

Теперь задача отыскания параметров фильтра становится однопараметрической, зависящей только от одного параметра  $a$ .

Для отыскания коэффициента  $a$  зададим еще одно условие, а именно, АЧХ фильтра должна пересекать ось абсцисс в некоторой точке, определяя тем самым полосу пропускания фильтра  $\omega^*T$ . Это условие записывается в виде

$$2a \cos 2\omega^*T + 0,5 \cos \omega^*T + 0,5 - 2a = 0. \quad (4.70)$$

Из условия (4.70) имеем)

$$a = 0,25 \frac{1 + \cos 2\omega^*T}{1 - \cos \omega^*T}. \quad (4.71)$$

Величины коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$  для различных значений  $\omega^*T$  приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Величины коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$  для разных значений  $\omega^*T$

$\omega^*T$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$
$a$	0,125	0,0904	0,0732	0,065
$b$	0,25	0,25	0,25	0,25
$c$	0,25	0,3192	0,3536	0,37

Анализ обобщенных уравнений нерекурсивного фильтра (4.40) и АЧХ фильтра (4.64) позволяет записать связь между параметрами АЧХ

$a$ ,  $b$ ,  $c$  и коэффициентами уравнения фильтра (4.40), которая для  $m = 4$  определяется соотношениями:

$$c_0 = a; \quad c_1 = b; \quad c_2 = c; \quad c_3 = b; \quad c_4 = a. \quad (4.72)$$

Фильтр 5 получен из формулы (4.40) при подстановке в нее коэффициентов (4.72) для  $\omega^* T = \frac{\pi}{2}$ :

$$y[nT] = 0,125x[nT] + 0,25x[(n-1)T] + 0,25x[(n-2)T] + \\ + 0,25x[(n-3)T] + 0,125x[(n-4)T]. \quad (4.73)$$

Фильтр 6 получен из формулы (4.40) при подстановке в нее коэффициентов (4.72) для  $\omega^* T = \frac{5\pi}{8}$ :

$$y[nT] = 0,0904x[nT] + 0,25x[(n-1)T] + 0,3192x[(n-2)T] + \\ + 0,25x[(n-3)T] + 0,0904x[(n-4)T]. \quad (4.74)$$

Фильтр 7 получен подстановкой в формулу (4.40) коэффициентов (4.72) для  $\omega^* T = \frac{7\pi}{8}$ :

$$y[nT] = 0,0732x[nT] + 0,25x[(n-1)T] + 0,353x[(n-2)T] + \\ + 0,25x[(n-3)T] + 0,0732x[(n-4)T]. \quad (4.75)$$

На рис. 4.12 приведены АЧХ цифровых нерекурсивных фильтров № 5 (кривая 1), № 6 (кривая 2), № 7 (кривая 3), № 8 (кривая 4). Эти фильтры, имея четко выраженную полосу пропускания, достаточно эффективно подавляют высокочастотные составляющие входных сигналов.

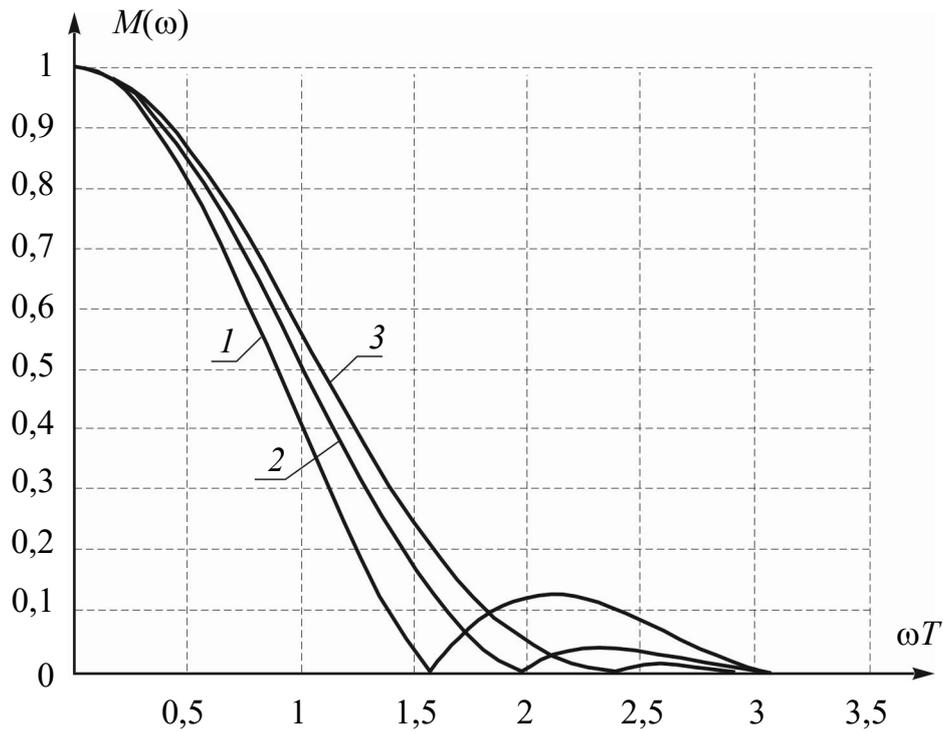


Рис. 4.12. АЧХ цифровых нерекурсивных фильтров № 5, 6, 7

Рассмотрим еще одну методику синтеза цифровых нерекурсивных фильтров, основанную на оптимизации АЧХ фильтра, в смысле улучшения его фильтрующих свойств. Введем в рассмотрение интегральный квадратичный функционал:

$$I(\omega_1 T) = \int_{\omega_1 T}^{\pi} M^2(\omega T) d\omega T, \quad (4.76)$$

и выберем коэффициент  $a$  из условия минимума функционала (4.76) при различных значениях  $\omega_1 T$ .

Подставим (4.69) в (4.76). В результате интегрирования имеем:

$$I(\omega_1 T) = \left[ \begin{aligned} &4a^2(1,5\omega T - \sin 2\omega T + 0,125 \sin 4\omega T) + \\ &+ 2a(0,166 \sin 3\omega T + 0,5 \sin 2\omega T - 0,5 \sin \omega T - \omega T) + \\ &+ 0,25(0,25 \sin 2\omega T + 2 \sin \omega T + 1,5\omega T) \end{aligned} \right]_{\omega_1 T}^{\pi}. \quad (4.77)$$

Запишем условие минимума по  $a$  функции (4.77)

$$\frac{\partial I(\omega_1 T)}{\partial a} = \left[ 8a(1,5\omega T - \sin 2\omega T + 0,125 \sin 4\omega T - \omega T) + \right. \\ \left. + 2(0,166 \sin 3\omega T + 0,5 \sin 2\omega T - 0,5 \sin \omega T - \omega T) \right]_{\omega_1 T}^{\pi} = 0. \quad (4.78)$$

Значения оптимальных значений коэффициентов АЧХ, полученных с помощью уравнения (4.78) и соотношения (4.70) при различных значениях  $\omega_1 T$  приведены в табл. 4.2.

Т а б л и ц а 4 . 2

Значения коэффициентов ФЧХ нерекурсивных фильтров

$\omega_1 T$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$
$a$	0,1444	0,1185	0,09594	0,0795
$b$	0,25	0,25	0,25	0,25
$c$	0,2111	0,2629	0,3081	0,341

На рис. 4.13 приведены АЧХ цифровых нерекурсивных фильтров для различных значений  $\omega_1 T \in (0, \pi)$ . Сравнение рисунков 4.12 и 4.13 позволяет сделать вывод о том, что оптимальные фильтры обладают более высокими фильтрующими свойствами при сравнимых полосах пропускания. В то же время следует отметить, что крутизна полосы пропускания всех без исключения нерекурсивных фильтров невелика, что является их общим недостатком.

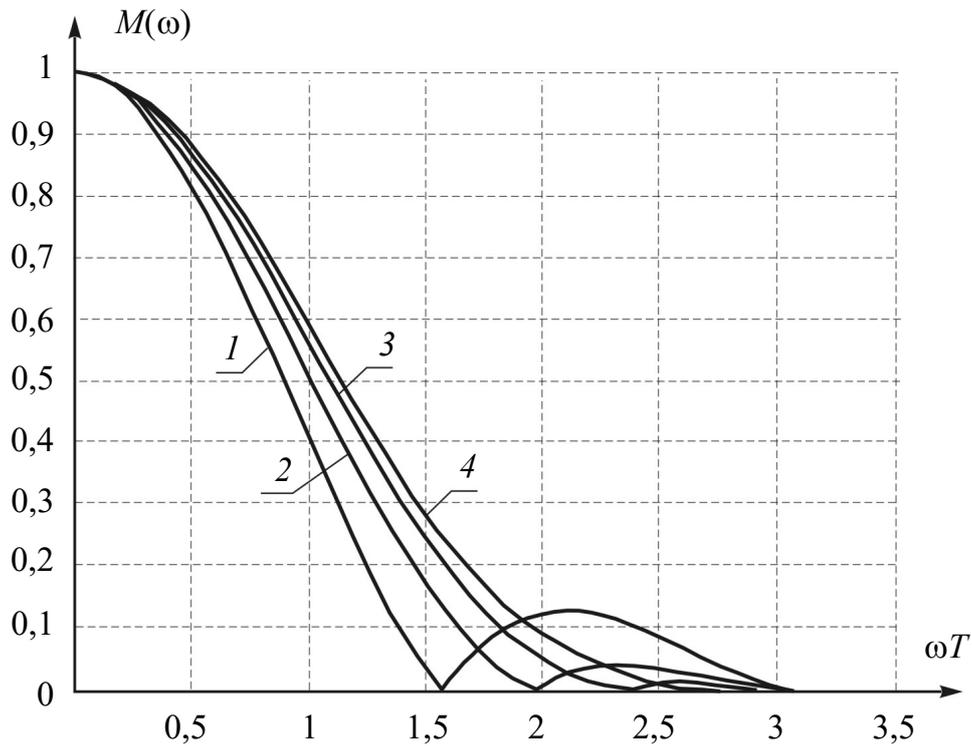


Рис. 4.13. АЧХ оптимальных фильтров

#### 4.7. Синтез цифровых рекурсивных фильтров

В общем случае дискретная передаточная функция рекурсивного фильтра  $k$ -го порядка записывается в виде

$$W(z) = \frac{\sum_{i=0}^k c_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^k d_i z^{-i}}. \quad (4.79)$$

Исследования Р. В. Хемминга [52] показали, что наиболее высокими фильтрующими свойствами при достаточно узкой полосе пропускания обладают фильтры Баттеруорта, квадрат АЧХ которых определяется соотношением

$$M^2(w) = \frac{1}{\left[1 + \frac{|w|}{w_c}\right]^{1N}}, \quad (4.80)$$

где  $w$  – комплексная переменная  $W$ -преобразования (4.27);  $N$  – порядок фильтра;  $w_c$  – некоторое значение переменной  $w$ , определяющее вид ФЧХ фильтра.

Для читателя, получившего объем знаний по классической теории автоматического управления из трудов советских ученых Е. П. Попова, В. В. Солодовникова, М. А. Айзермана и др. запись АЧХ в виде (4.81) является несколько непривычной. В дальнейшем нами будет совершен переход от формулы (4.81) к привычной для нас записи АЧХ.

Для отыскания величин  $N$  и  $w_c$  фильтра Баттеруорта воспользуемся рекомендацией работы [53]. Для этого рассмотрим примерный вид зависимости (4.80), представленный на рис. 4.14.

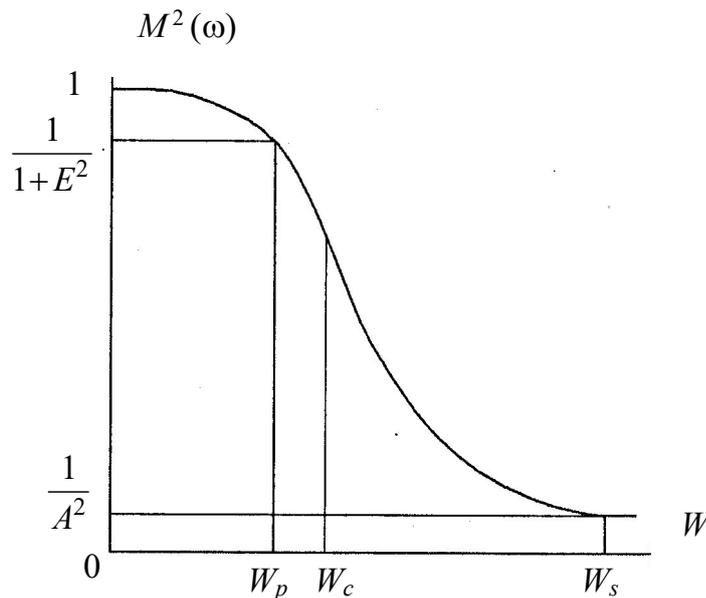


Рис. 4.14. К заданию параметров фильтров Баттеруорта

Запишем условия

$$\frac{1}{1+E^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{w_p}{w_c}\right)^{2N}}; \quad (4.81)$$

$$\frac{1}{A^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{w_s}{w_c}\right)^{2N}}, \quad (4.82)$$

или

$$\left(\frac{w_p}{w_c}\right)^{2N} = E^2; \quad (4.83)$$

$$\left(\frac{w_s}{w_c}\right)^{2N} = A^2 - 1. \quad (4.84)$$

Разделим (4.83) на (4.84)

$$\left(\frac{w_p}{w_s}\right)^{2N} = \frac{E^2}{A^2 - 1}; \quad (4.85)$$

извлечем квадратные корни из обеих частей соотношения (4.85)

$$\left(\frac{w_p}{w_s}\right)^{2N} = \frac{E}{\sqrt{A^2 - 1}}. \quad (4.86)$$

В результате из соотношений (4.85) и (4.86) получаем

$$N = \left[ \frac{\log\left(\frac{E}{\sqrt{A^2 - 1}}\right)}{\log\left(\frac{w_p}{w_s}\right)} \right]; \quad (4.87)$$

$$w_c = \frac{w_p}{\frac{1}{E^N}}. \quad (4.88)$$

Квадратные скобки в соотношении (4.87) означают выделение ближайшего целого числа из выражения в скобках.

Таким образом, задавая с помощью величин  $w_p$ ,  $w_s$ ,  $A$  и  $E$  требуемый вид кривой (4.80), получаем параметры фильтра Баттеруорта. Для этого запишем связь между комплексными переменными  $z$ ,  $s$  и  $w$  соответственно  $Z$ -преобразования, преобразование Лапласа и  $W$ -преобразования

$$z = e^{sT} = \frac{1+w}{1-w}. \quad (4.89)$$

Рассмотрим соотношение

$$\frac{1+w}{1-w} = e^{sT}, \quad (4.90)$$

в котором произведем замену  $s = j\omega$

$$\frac{1+w}{1-w} = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T. \quad (4.91)$$

Из соотношения (4.91) получаем

$$w = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{\cos \omega T - 1 + j \sin \omega T}{\cos \omega T + 1 + j \sin \omega T} = j \omega T \frac{\omega T}{2}. \quad (4.92)$$

Подставляя формулу (4.92) в соотношение (4.81), получаем выражение для ФЧХ фильтра Баттеруорта в привычной для нас форме:

$$M(\omega) = \frac{w_c^N}{\sqrt{\operatorname{tg}^{2N} \frac{\omega T}{2} + w_c^{2N}}}. \quad (4.93)$$

ФЧХ фильтров Баттеруорта различных порядков определяется соотношением

$$\Psi(\omega) = -N \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}{w_c} \right). \quad (4.94)$$

В качестве примера рассмотрим АЧХ и ФЧХ трех фильтров Баттеруорта, параметры которых имеют следующие значения:  $\frac{1}{A^2} = 0,1$ ;  $\frac{1}{1+E^2} = 0,6$ ;  $w_p = 0,25676$ ;  $T = 0.04$  с;  $w_{s1} = 0,4891$ ;  $w_{s2} = 0,3959$ ;  $w_{s3} = 0,3529$ . Воспользовавшись формулами (4.87) и (4.88) для трех рассматриваемых фильтров получаем:  $N_1 = 2,019 \approx 2$ ;  $N_2 = 3,005 \approx 3$ ;  $N_3 = 4,090 \approx 4$ ;  $w_{c1} = 0,28414$ ;  $w_{c2} = 0,27471$ ;  $w_{c3} = 0,27011$ .

На рис. 4.15 приведены АЧХ и ФЧХ рассматриваемых фильтров Баттеруорта, построенных с помощью соотношений (4.93) и (4.94). Анализ построенных кривых позволяет сделать вывод о том, что повышение порядка фильтра Баттеруорта приводит к сужению полосы пропускания с одновременным повышением его фильтрующих свойств. С другой стороны, повышение порядка фильтра приводит к значительному возрастанию фазового запаздывания выходного сигнала фильтра относительно входного.

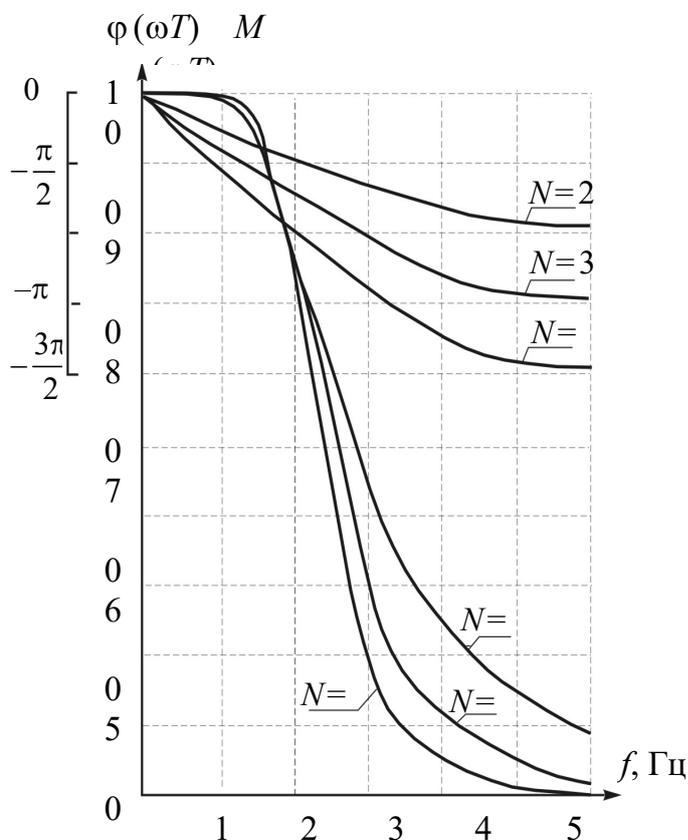


Рис. 4.15. АЧХ и ФЧХ фильтров Баттеруорта

Из соотношения (4.89) получаем

$$w = \frac{z-1}{z+1}. \quad (4.95)$$

Тогда, с учетом соотношения (4.81), получаем дискретную передаточную функцию фильтра Баттеруорта

$$W_B(z) = \frac{w_c^N}{\sqrt{w_c^{2N} + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2N}}}. \quad (4.96)$$

Положим  $N = 2$ . Тогда соотношение (4.96) приводится к виду:

$$W_B(z) = \frac{a_1(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 + d_1z^{-1} + d_2z^{-2}}, \quad (4.97)$$

а уравнение рекурсивного фильтра Баттеруорта второго порядка записывается в виде:

$$y[nT] = a_1(x[nT] + 2[(n-1)T] + x[(n-2)T]) - d_1y[(n-1)T] + d_2y[(n-2)T], \quad (4.98)$$

причем коэффициенты фильтра (4.98) равны:

$$a_1 = \frac{w_c}{1 + \sqrt{2}w_c + w_c^2};$$

$$d_1 = \frac{2(w_c^2 - 1)}{1 + \sqrt{2}w_c + w_c^2};$$

$$d_2 = \frac{1 - \sqrt{2}w_c + w_c^2}{1 + \sqrt{2}w_c + w_c^2}.$$

## 4.8. Синтез дифференцирующих фильтров

Помехозащищенность цифровой САУ существенно снижается, если алгоритм управления использует информацию о производной «зашумленного» сигнала, например, при использовании ПД-стабилизатора линии прицеливания. Действительно, если первая разность решетчатой функции оценивается формулой

$$y[nT] = \frac{1}{T} \{x[nT] - x[(n-1)T]\}, \quad (4.99)$$

то дискретная передаточная функция дифференцирующего фильтра (4.99) может быть записана в виде:

$$W(z) = \frac{Z\{y[nT]\}}{Z\{x[nT]\}} = \frac{1}{T}(1 - z^{-1}). \quad (4.100)$$

С учетом формулы (4.90) из соотношения (4.100) получаем выражение для частотной передаточной функции фильтра (4.99)

$$W(j\omega) = \frac{1}{T}(1 - e^{-j\omega T}). \quad (4.101)$$

Тогда действительная и мнимая части (4.101) записываются

$$\operatorname{Re}W(j\omega) = \frac{1}{T}(1 - \cos \omega T); \quad \operatorname{Im}W(j\omega) = \frac{1}{T} \sin \omega T,$$

а АЧХ и ФЧХ фильтра (4.99) определяются формулами

$$M(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}^2 W(j\omega) + \operatorname{Im}^2 W(j\omega)} = \left| \frac{2}{T} \sin \frac{\omega T}{2} \right|; \quad (4.102)$$

$$\Psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\cos \frac{\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}}. \quad (4.103)$$

АЧХ и ФЧХ фильтра (4.99) при  $T = 0,04$  с приведены на рис. 4.16 и рис. 4.17 (кривая 1). Анализ этих кривых приводит к выводу, что оценка производной «зашумленного» дискретного сигнала с помощью формулы (4.99) резко снижает помехозащищенность цифровой САУ, усиливая амплитуды высокочастотных шумов. Для оценки производных «зашумленных» дискретных сигналов необходимо использовать цифровые фильтры более сложной структуры, чем фильтр (4.99).

Выбор структуры и параметров дифференцирующего фильтра будем осуществлять в классе фильтров Ланцоша [53], общее уравнение которых имеет следующий вид

$$y[nT] = \frac{3}{TN(N+1)(2N+1)} \sum_{k=0}^{2N} (N-k)x[(N-k)T], \quad (4.104)$$

где  $N$  – порядок фильтра.

Из соотношения (4.104) запишем формулу для дискретной передаточной функции фильтра Ланцоша:

$$W_{\text{Л}}(z) = \frac{3}{TN(N+1)(2N+1)} \sum_{k=0}^{2N} (N-k)xz^{-k}. \quad (4.105)$$

С учетом формулы (4.105) запишем выражение для частотной передаточной функции фильтра

$$W_{\text{Л}}(j\omega) = \frac{3}{TN(N+1)(2N+1)} \sum_{k=0}^{2N} (N-k)e^{-j\omega T}. \quad (4.106)$$

В (4.106) выделим действительную и мнимую части

$$\operatorname{Re} W_{\text{Л}}(j\omega) = \frac{3}{TN(N+1)(2N+1)} \sum_{k=0}^{2N} (N-k) \cos \omega kT; \quad (4.107)$$

$$\operatorname{Im} W_{\text{Л}}(j\omega) = \frac{3}{TN(N+1)(2N+1)} \sum_{k=0}^{2N} (N-k) \sin \omega kT. \quad (4.108)$$

С учетом соотношений (4.107) и (4.108) запишем формулы для расчета АЧХ и ФЧХ фильтра Ланцоша  $N$ -го порядка

$$M[\omega] = \frac{6}{TN(N+1)(2N+1)} \sum_{k=0}^N k \sin \omega kT; \quad (4.109)$$

$$\Psi[\omega] = \operatorname{arctg} \frac{\cos \omega kT}{\sin \omega kT}. \quad (4.110)$$

На рис. 4.16 и рис. 4.17 приведены АЧХ и ФЧХ фильтров Ланцоша различных порядков:

- фильтр Ланцоша 1-го порядка  $N = 1$  (кривая 2)

$$M(\omega) = \frac{1}{T} |\sin \omega T|; \quad (4.111)$$

$$\Psi[\omega] = \operatorname{arctg} \frac{\cos \omega T}{\sin \omega T}; \quad (4.112)$$

- фильтр Ланцоша 2-го порядка  $N = 2$  (кривая 3)

$$M(\omega) = \frac{1}{5T} |2 \sin 2\omega T + \sin \omega T|; \quad (4.113)$$

$$\Psi[\omega] = \operatorname{arctg} \frac{\cos 2\omega T}{\sin 2\omega T}; \quad (4.114)$$

- фильтр Ланцоша 3-го порядка  $N = 3$  (кривая 4)

$$M(\omega) = \frac{1}{14T} |3 \sin 3\omega T + 2 \sin 2\omega T + \sin \omega T|; \quad (4.115)$$

$$\Psi[\omega] = \operatorname{arctg} \frac{\cos 3\omega T}{\sin 3\omega T}; \quad (4.116)$$

- фильтр Ланцоша 4-го порядка  $N = 4$  (кривая 5)

$$M(\omega) = \frac{1}{30T} |4 \sin 4\omega T + 3 \sin 3\omega T + 2 \sin 2\omega T + \sin \omega T|; \quad (4.117)$$

$$\Psi[\omega] = \arctg \frac{\cos 4\omega T}{\sin 4\omega T}. \quad (4.118)$$

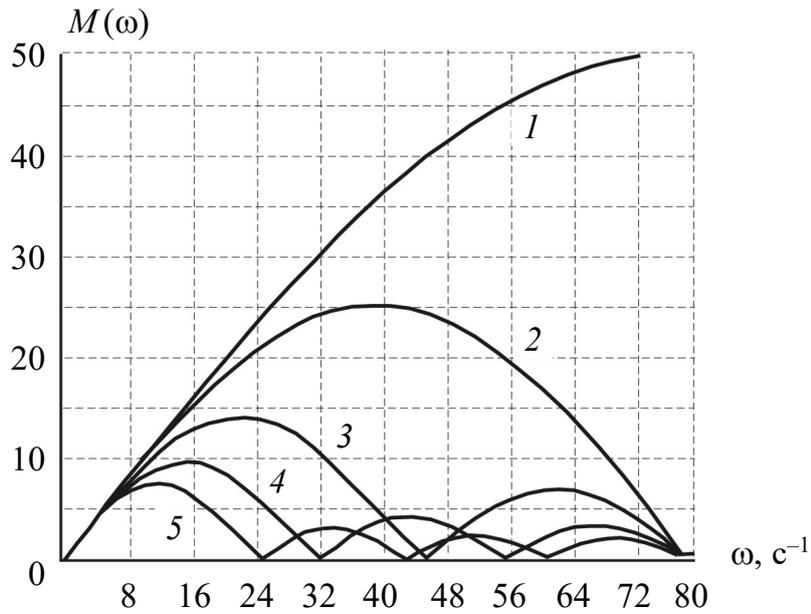


Рис. 4.16. АЧХ фильтров (4.102), (4.111), (4.113), (4.115) и (4.117)

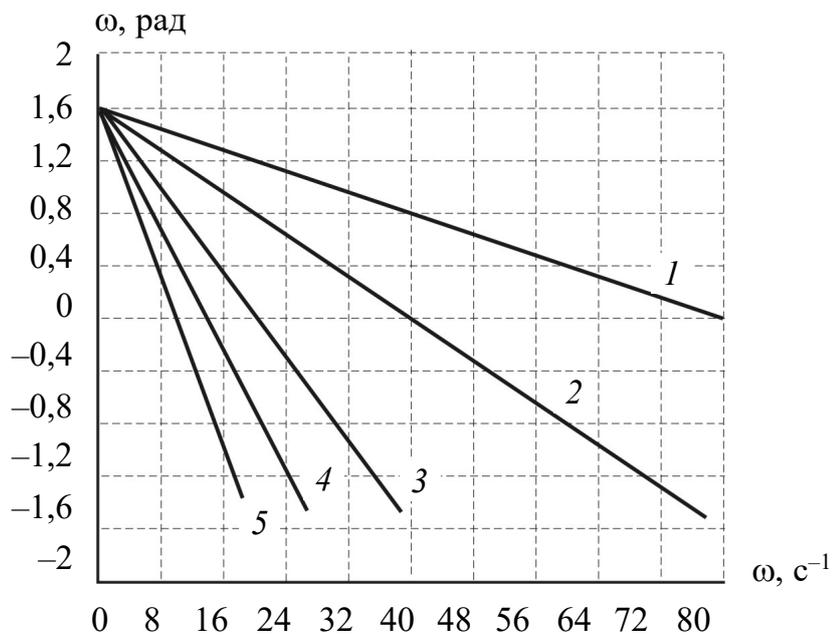


Рис. 4.17. ФЧХ фильтров (4.103), (4.112), (4.114), (4.116) и (4.118)

Анализ построенных с помощью соотношений (4.111)–(4.118) кривых приводит к выводу, что с повышением порядка фильтра Ланцоша полоса пропускания уменьшается. До середины полосы пропускания имеет место фазовое опережение, а затем ФЧХ проходит через нуль.

Уравнение фильтров Ланцоша различных порядков могут быть получены из соотношений (4.104):

- фильтр 1-го порядка

$$y[nT] = \frac{1}{2T} \{x[nT] - x[(n-2)T]\}; \quad (4.119)$$

- фильтр 2-го порядка

$$y[nT] = \frac{1}{10T} \left\{ \begin{array}{l} 2x[nT] + x[(n-2)T] - \\ -x[(n-3)T] - 2x[(n-4)T] \end{array} \right\}; \quad (4.120)$$

- фильтр 3-го порядка

$$y[nT] = \frac{1}{28T} \left\{ \begin{array}{l} 3x[nT] + 2x[(n-1)T] + x[(n-2)T] - \\ -x[(n-4)T] - 2x[(n-5)T] - 3x[(n-6)T] \end{array} \right\}; \quad (4.121)$$

- фильтр 4-го порядка

$$y[nT] = \frac{1}{60T} \left\{ \begin{array}{l} 4x[nT] + 3x[(n-1)T] + 2x[(n-2)T] + \\ + x[(n-3)T] - x[(n-5)T] - 2x[(n-6)T] - \\ - 3x[(n-7)T] - 4x[(n-8)T] \end{array} \right\}. \quad (4.122)$$

## 4.9. Синтез цифровых ПД-стабилизаторов

Рассмотрим цифровой ПД-стабилизатор, структурная схема которого приведена на рис. 4.18. Передаточная функция такого стабилизатора, выполненного по параллельной схеме, записывается

$$W_c(z) = k_\phi W_B(z) + k_\dot{\phi} W_L(z), \quad (4.123)$$

где  $W_B(z)$  – дискретная передаточная функция фильтра Баттеруорта;  $W_L(z)$  – дискретная передаточная функция фильтра Ланцоша.

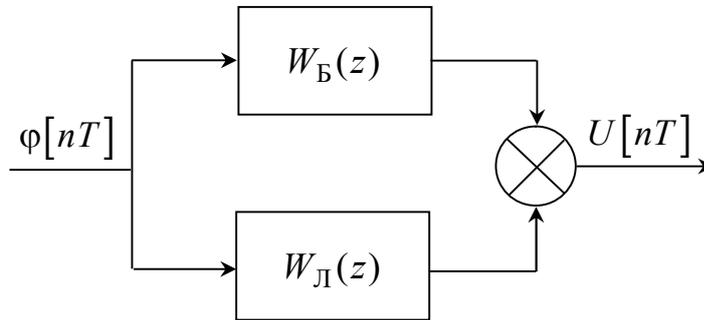


Рис. 4.18. Структурная схема цифрового ПД-стабилизатора выполненного по параллельной схеме

Предположим, что фильтры Баттеруорта и Ланцоша имеют второй порядок, передаточные функции которых представляются в виде:

$$W_B(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}; \quad (4.124)$$

$$W_L(z) = c_0 + c_1 z^{-1} - c_1 z^{-3} - c_0 z^{-4}. \quad (4.125)$$

Подставляя (4.124) и (4.125) в формулу (4.123), получим дискретную передаточную функцию ПД-стабилизатора, представленного на рис. 4.19,

$$W_c(z) = \frac{k_\phi (d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}) + k_\dot{\phi} (f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + f_3 z^{-3} - f_4 z^{-4} - f_5 z^{-5} - f_5 z^{-5})}{1 + l_1 z^{-1} + l_2 z^{-2}}, \quad (4.126)$$

где соответствующие постоянные связаны с параметрами фильтров (4.124) и (4.125) соотношениями:

$$d_0 = \frac{a_0}{b_0}; \quad d_1 = \frac{a_1}{b_0}; \quad f_0 = c_0; \quad f_1 = \frac{b_0 c_1 + b_1 c_0}{b_0}; \quad f_2 = \frac{b_1 c_1 + b_2 c_0}{b_0};$$

$$f_3 = \frac{c_1(b_2 + b_0)}{b_0}; \quad f_4 = \frac{b_0 c_0 + b_1 c_1}{b_0}; \quad f_5 = \frac{b_1 c_0 + b_2 c_1}{b_0}; \quad f_6 = \frac{b_2 c_0}{b_0};$$

$$l_1 = \frac{b_1}{b_0}; \quad d_2 = \frac{b_2}{b_0}.$$

Из соотношения (4.126) получаем разностное уравнение ПД-стабилизатора

$$U(nT) = k_\varphi \{d_0 \varphi[nT] + d_1 \varphi[(n-1)T] + d_2 \varphi[(n-2)T]\} +$$

$$+ k_{\dot{\varphi}} \left\{ \begin{array}{l} f_0 \varphi[nT] + f_1 \varphi[(n-1)T] + f_2 \varphi[(n-2)T] + f_3 \varphi[(n-3)T] - \\ - f_4 \varphi[(n-4)T] - f_5 \varphi[(n-5)T] - f_6 \varphi[(n-6)T] \end{array} \right\} - \quad (4.127)$$

$$- l_1 U[(n-1)T] + l_2 U[(n-2)T].$$

В качестве примера рассмотрим фильтры (4.124) и (4.125) с параметрами:  $a_0 = 0,08073$ ;  $a_1 = 0,16147$ ;  $b_0 = 1,48256$ ;  $b_1 = -1,83854$ ;  $b_2 = 0,67789$ ;  $c_0 = 5$ ;  $c_1 = 2,5$ . Используя соотношение (4.127), построим АЧХ и ФЧХ рассматриваемого ПД-стабилизатора при различных значениях варьируемых параметров  $k_\varphi$  и  $k_{\dot{\varphi}}$ . Для этого на входе линейного цифрового стабилизатора (4.127) сформируем синусоидальную решетчатую функцию

$$\varphi(nT) = A \sin \omega nT. \quad (4.128)$$

При этом на выходе стабилизатора, в соответствии с алгоритмом (4.127) имеет место синусоидальная решетчатая функция

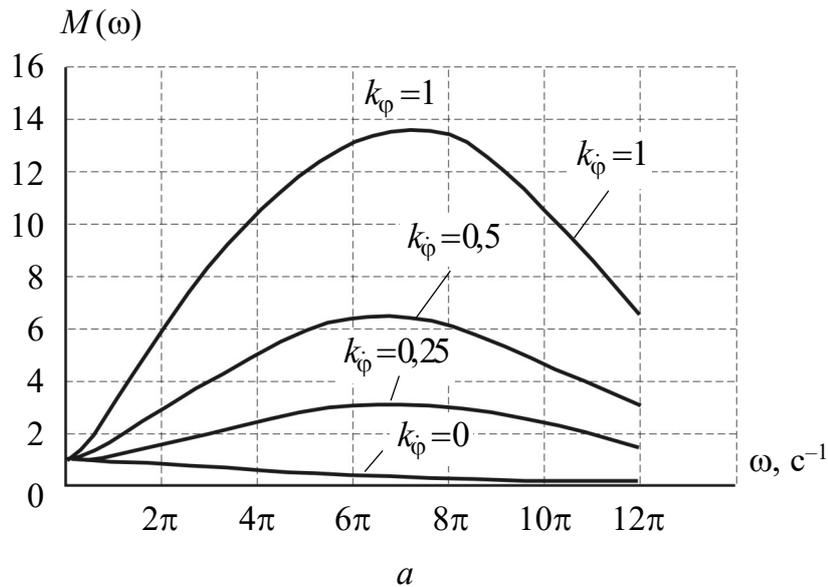
$$U(nT) = B(\omega T) \sin \{ \omega nT + \psi[\omega T] \}. \quad (4.129)$$

Для каждого текущего значения  $\omega T$  вычисляется значение АЧХ

$$M(\omega T) = \frac{B(\omega T)}{A}$$

и измеряется фазовый сдвиг выходного сигнала (4.129) относительно входного (4.128). АЧХ и ФЧХ ПД-стабилизатора (4.127) приведены на рис. 4.19.

Анализ АЧХ и ФЧХ фильтра (4.127) позволяет сделать вывод, что стабилизатор (4.123) не очень эффективно подавляет высокочастотные помехи, причем с ростом константы  $k_{\phi}$  интенсивность подавления высокочастотных помех снижается. Объясняется это тем, что в схеме ПД-стабилизатора, приведенной на рис. 4.18, на фильтр Ланцоша подается зашумленный высокочастотными помехами входной сигнал, а подавление фильтром Ланцоша высоких частот не всегда эффективно.



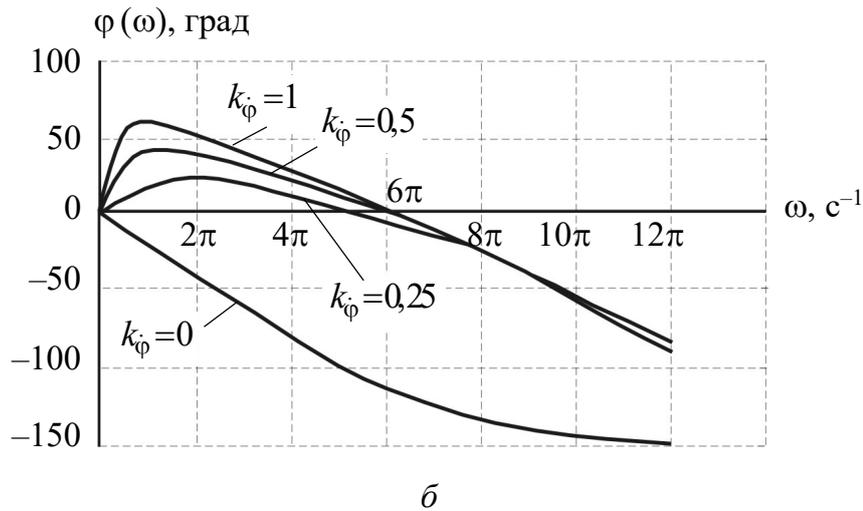


Рис. 4.19. АЧХ (а) и ФЧХ (б) ПД-стабилизатора (4.127)

В соответствии с изложенным, рассмотрим ПД-стабилизатор, выполненный по последовательно-параллельной схеме и представленный на рис. 4.20. В этой схеме на фильтр Ланцоша подается уже отфильтрованный низкочастотным фильтром Баттеруорта сигнал  $\tilde{\varphi}[nT]$ .

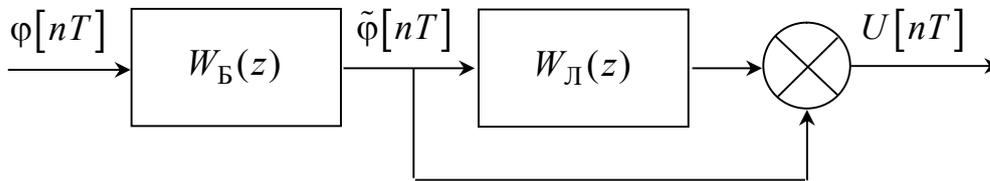


Рис. 4.20. ПД-стабилизатор выполненный по последовательно-параллельной схеме

Передаточная функция ПД-стабилизатора, представленного на рис. 4.20, равна:

$$W_c(z) = k_\varphi W_B(z) + k_\varphi k_\dot{\varphi} W_B(z) W_L(z) = k_\varphi W_B(z) [1 + k_\dot{\varphi} W_L(z)]. \quad (4.130)$$

Подставляя в (4.130) соотношения (4.124) и (4.125) получаем:

$$W_c(z) = \frac{k_\varphi \left\{ \begin{array}{l} d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \\ + k_\varphi (f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + f_2 z^{-4} - f_1 z^{-5} - f_0 z^{-6}) \end{array} \right\}}{1 + l_1 z^{-1} + l_2 z^{-2}}. \quad (4.131)$$

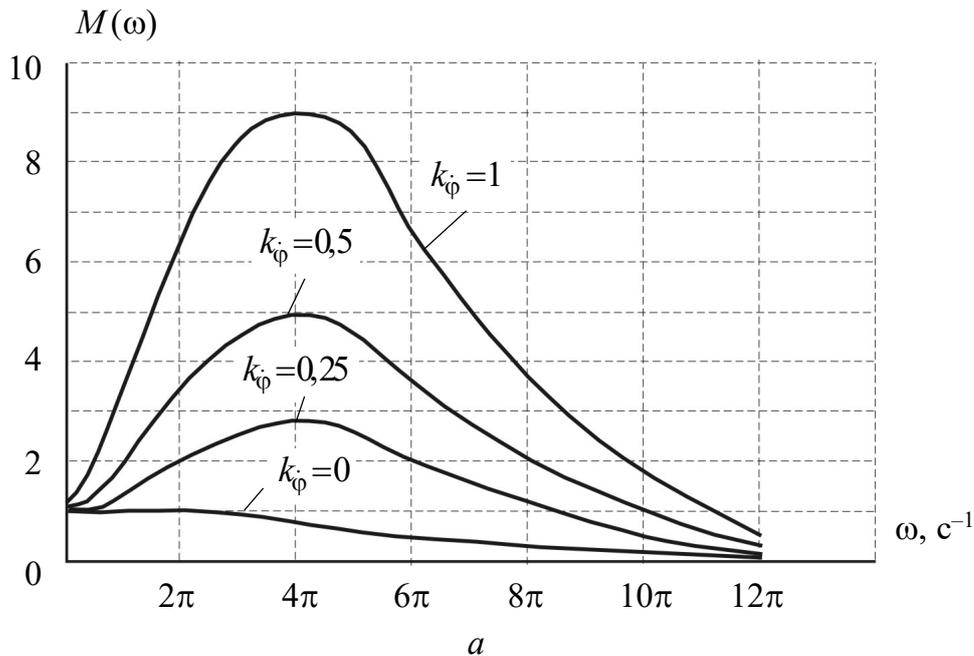
Соответствующее передаточной функции (4.131) разностное уравнение ПД-стабилизатора имеет вид:

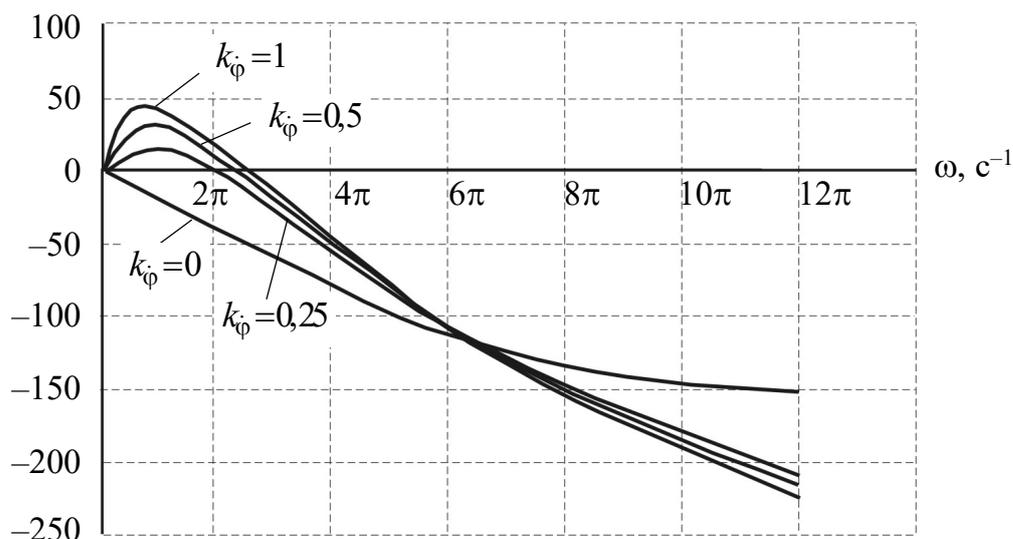
$$U(nT) = k_\varphi \left\{ \begin{array}{l} d_0 \varphi[nT] + d_1 \varphi[(n-1)T] + d_2 \varphi[(n-2)T] + \\ + k_\varphi \left[ \begin{array}{l} f_0 \varphi[nT] + f_1 \varphi[(n-1)T] + f_2 \varphi[(n-2)T] - \\ - f_2 \varphi[(n-4)T] - f_1 \varphi[(n-5)T] - f_0 \varphi[(n-6)T] \end{array} \right] \end{array} \right\} - \quad (4.132)$$

$$- l_1 U[(n-1)T] + l_2 U[(n-2)T].$$

На рис. 4.21 приведены АЧХ и ФЧХ стабилизатора (4.132). Подавление высокочастотных помех стабилизатора (4.132) значительно эффективнее, чем стабилизатором (4.127).

Анализ цифрового ПД-стабилизатора, выполненного по последовательно-параллельной схеме, показывает, что его высокие динамические свойства обусловлены тем, что на вход дифференцирующего фильтра Ланцоша подается входной сигнал фильтра Баттеруорта, который практически не содержит высокочастотных помех.





б

Рис. 4.21. АЧХ (а) и ФЧХ (б) стабилизатора (4.132)

Рассмотрим ПД-стабилизатор, представленный на рис. 4.20 с фильтром Баттеруорта третьего порядка с передаточной функцией

$$W_B(z) = \frac{a_0(1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3})}{1 + d_{10}z^{-1} + d_{20}z^{-2} + d_{30}z^{-3}}, \quad (4.133)$$

и фильтром Ланцоша первого порядка с передаточной функцией

$$W_L(z) = c_2(1 - z^{-2}). \quad (4.134)$$

В результате получаем передаточную функцию ПД-стабилизатора в виде

$$W_c(z) = \frac{k_\phi a_0 \left\{ \begin{array}{l} 1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3} + \\ + k_\phi c_2(1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} - \\ - 2z^{-3} - 3z^{-4} - z^{-5}) \end{array} \right\}}{1 + d_{10}z^{-1} + d_{20}z^{-2} + d_{30}z^{-3}}, \quad (4.135)$$

которой соответствует алгоритм стабилизации

$$U(nT) = k_{\varphi} a_0 \left\{ \begin{array}{l} \varphi[nT] + 3\varphi[(n-1)T] + 3\varphi[(n-2)T] + \varphi[(n-3)T] + \\ + k_{\dot{\varphi}} c_2 \left[ \begin{array}{l} \varphi[nT] + 3\varphi[(n-1)T] + 2\varphi[(n-2)T] - \\ - 2\varphi[(n-3)T] - 3\varphi[(n-4)T] - \varphi[(n-5)T] \end{array} \right] \end{array} \right\} - \quad (4.136)$$

$$- d_{10} U[(n-1)T] + d_{20} U[(n-2)T] - d_{30} U[(n-3)T].$$

Пусть параметры фильтров (4.133) и (4.134) равны:  $a_0 = 0,012045$ ;  $d_{10} = -1,93847$ ;  $d_{20} = -1,37229$ ;  $d_{30} = -0,33745$ ;  $c_2 = 12,5$ .

АЧХ и ФЧХ стабилизатора (4.136) практически полностью совпадает с соответствующими характеристиками стабилизатора (4.132). Некоторое ухудшение фильтрующих свойств фильтра (4.134) по сравнению с фильтром (4.125) компенсируется использованием фильтра Баттеруорта третьего порядка (4.133) с практически идеальной АЧХ, который эффективно фильтрует высокочастотные помехи.

Таким образом, цифровые ПД-стабилизаторы целесообразно строить по последовательно-параллельной схеме в соответствии с алгоритмами стабилизации (4.132) и (4.136).

Анализ рисунков (4.19) и (4.21) показывает, что стабилизаторы (4.132) и (4.136) «исправляют» недостатки АЧХ и ФЧХ замкнутой следящей системы передачи угла, а именно, корректируют фазовое запаздывание также в области рабочих частот. Особо критичной рабочей частотой для объектов бронетанковой техники является частота собственных колебаний подрессоренной части корпуса, которая соответствует 1,2–2 Гц (8–12 с<sup>-1</sup>).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ. – М. : Наука, 1967. – 415 с.
2. Аблесімов О. К. Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами. – Т. 3 : Автоматичне керування озброєних танків / О.К. Аблесімов, Є.Є. Александров, І.Є. Александрова. – Харків : НТУ «ХП», 2008. – 444 с.
3. Александров Е. Е. Оценка точности стабилизации поля зрения прицела танковой пушки / Е. Е. Александров, Т. Е. Александрова, А. А. Лазаренко // Артиллерийское и стрелковое вооружение. – 2011. № 3. – С. 48–51.
4. Корнеев В. В. Основы автоматики танковые автоматические системы / В. В. Корнеев, М. И. Кузнецов, Л. П. Кузьмин, К. И. Павличук. – М. : АБТВ, 1976. – 546 с.
5. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М. : Физматгиз, 1961. – 824 с.
6. Гельфанд И. М. Вариационное исчисление / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. – М. : Физматгиз, 1962.
7. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М. : Наука, 1969. – 424 с.
8. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М. : Физматгиз, 1960. 240 с.
9. Постников В. С. Внутреннее трение в металлах. – М. : Metallurgy, 1974. – 351 с.
10. Сиразетдинов Т. К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. – М. : Наука, 1987. – 232 с.
11. Бабаков И. М. Теория колебаний. – М. : Наука, 1965. – 559 с.
12. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. – М. : Высшая школа, 1980. – 408 с.
13. Дегтярев Г. Л. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами / Г. Л. Дегтярев, Т. К. Сиразетдинов. – М. : Машиностроение, 1986. – 216 с.

14. Попов Е. П. Разделение управляемого процесса по частотам при приближенном исследовании нелинейных систем / Е. П. Попов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1967. – № 5. – С. 181–189.

15. Геращенко Е. И. Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем / Е. И. Геращенко, С. М. Геращенко. – М. : Наука, 1975. – 295 с.

16. Вибрации в технике / под ред. В. Н. Челомея. – Т. 3 : Колебания машин, конструкций и их элементов. – М. : Машиностроение, 1980. – 544 с.

17. Вибрации в технике / под ред. В. Н. Челомея. – Т. 6 : Защита от вибраций и ударов. – М. : Машиностроение, 1981. – 456 с.

18. Александрова Т. Е. Имитационное моделирование внешних возмущений, действующих на танковую пушку / Т. Е. Александрова, И. Е. Александрова, С. Н. Белов // Механіка та машинобудування. – 2011. № 1. – С. 43–50.

19. Мазманишвили А. С. Моделирование Марковских случайных последовательностей и алгоритм генерации однородного двумерного марковского поля / А. С. Мазманишвили, В. Е. Щербань // Электронное моделирование. – 1996. – Т. 18. – № 2. – С. 93–95.

20. Борисюк М. Д. Стохастическая оценка плавности хода многоопорного транспортного средства / М. Д. Борисюк, Т. Е. Александрова, А. С. Мазманишвили // Доповіді Національної Академії наук України. – 2013. – № 6. – С. 52–59.

21. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразований Лапласа и Z-преобразования. – М. : Наука, 1971. – 288 с.

22. Зубов В. И. Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – М. : Наука, 1975. – 496 с.

23. Понтрягин Л. С. Дифференциальные уравнения и их приложения. – М. : Наука, 1988. – 208 с.

24. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. – М. : Физматгиз, 1959. – 468 с.

25. Малкин Н. Г. Теория устойчивости движения / Н. Г. Малкин. – М. : Наука, 1966. – 530 с.

26. Айзерман М. А. Лекции по теории автоматического регулирования / М. А. Айзерман. – М. : Физматгиз, 1958. – 520 с.

27. Орурк И. А. Новые методы синтеза линейных и некоторых нелинейных динамических систем / И. А. Орурк. – М.-Л. : Наука, 1965. – 207 с.
28. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем / А. М. Летов. – М. : Физматгиз, 1962. – 484 с.
29. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкренидзе и др. – М. : Физматгиз, 1961. – 392 с.
30. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления / В. Г. Болтянский. – М. : Наука, 1969. – 408 с.
31. Летов А. М. Динамика полета и управление / А. М. Летов. – М. : Наука, 1969. – 312 с.
32. Летов А. М. Математическая теория процессов управления / А. М. Летов. – М. : Наука, 1981. – 256 с.
33. Александров Е. Е. Автоматизированное проектирование динамических систем с помощью функций Ляпунова / Е. Е. Александров, М. В. Бех. – Харьков : Основа, 1993. – 112 с.
34. Александров Е. Е. Параметрическая оптимизация регулируемых динамических систем с помощью функций Ляпунова / Е. Е. Александров // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1990. – № 3. – С. 44–49.
35. Воронин А. Н. Многокритериальный синтез динамических систем / И. А. Воронин. – К. : Наукова думка, 1992. – 160 с.
36. Воронин А. Н. Векторная оптимизация динамических систем / А. Н. Воронин, Ю. К. Зиятдинов, А. И. Козлов и др. – К. : Техніка, 1999. – 284 с.
37. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : Наука, 1961. – 576 с.
38. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау – М. : Мир, 1975. – 534 с.
39. Александрова Т. Е. Параметрический синтез оптимального стабилизатора танковой пушки / Т. Е. Александрова, И. В. Костяник, А. Е. Истомин // Механіка та машинобудування. – 2012. – № 2. – С. 203–210.
40. Александрова Т. Е. О единственности решения задачи параметрического синтеза линейной динамической системы с интегральным квадратичным критерием оптимальности / Т. Е. Александрова // Системи обробки інформації. – 2013. – Вып. 7 (114). – С. 116–120.

41. Кунцевич В. М. Квазиинвариантность, ротастность и адаптация в системах управления / В. М. Кунцевич // 70 лет теории инвариантности : тр. науч. семинара. – М., 2008. – С. 61–90.
42. Жаров Ю. С. Рациональная схема демпфирования электромагнитных стабилизаторов танкового вооружения / Ю. С. Жаров // Вестник бронетанковой техники. – 1965. – № 2. – С. 56–59.
43. Ледовский А. Д. Анализ возмущенных воздействий неуравновешенной танковой башни / А. Д. Ледовский, Р. И. Свердлов // Вестник бронетанковой техники. – 1969. – № 1. – С. 7–10.
44. Патент України № 83903. Стабілізатор танкової гармати. Автори: Александрова Т.Є., Лазаренко А.О. Бюл. № 19.
45. Александров Е. Е. Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами. – Т. 1 : Теорія автоматичного керування / Є.Є. Александров, Б.І. Кузнецов, Є.П. Козлов. – Х. : НТУ «ХП», 2002.
46. Александрова Т. Е. Параметрический синтез оптимальных робастных стабилизаторов подвижных объектов / Т. Е. Александрова // Радиоэлектроника. Информатика. Управление. – 2012. – № 1 (26). – С. 141–143.
47. Александрова Т. Е. Параметрический синтез грубых информационно-управляющих систем / Т. Е. Александрова // Механіка та машинобудування. – 2013. – № 1. – С. 125–132.
48. Емельянов С. В. Системы автоматического управления с переменной структурой / С. В. Емельянов. – М. : Наука, 1967. – 336 с.
49. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости / Е. А. Барбашин. – М. : Наука, 1967. – 224 с.
50. Патент України № 83904. Стабілізатор лінії прицілювання танкової гармати. Автори: Александрова Т. Є., Зейн А. В. Заявка № U 201300691 від 21.01.2013. Опубл. 10.10.2013. Бюл. № 19.
51. Ту Ю. Цифровые и импульсные системы автоматического управления / Ю. Ту. – М. : Машиностроение, 1964. – 703 с.
52. Хэмминг Р. В. Цифровые фильтры / Р. В. Хэмминг. – М. : Наука, 1984. – 221 с.
53. Александрова И. Е. Цифровые фильтры в системах автомобильной электроники / И. Е. Александрова, Т. Е. Александрова, А. А. Лазаренко, А. В. Зейн // Вестник Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ). – 2014. – № 2(37). – С. 25–28.

54. Патент України № 81491. Стабілізатор основного озброєння танка. Автор Александрова Т.Є. Заявка № U 201302760 від 05.03.2013. Опубл. 25.06.2013. Бюл № 12.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение 1

### Производные важнейших элементарных функций

Функция	Производная	Функция	Производная
$C (\text{const})$	$0$	$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$
$x$	$1$	$\lg x$	$\frac{1}{x} \lg_a e \approx \frac{0,4343}{x}$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{x^{n+1}}$	$\text{tg } x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\text{arctg } x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\text{ctg } x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\text{cosec}^2 x$
$e^x$	$e^x$	$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \text{tg } x \sec x$
$\text{sh } x$	$\text{ch } x$	$\text{cosec } x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\text{ctg } x \text{ csecc } x$
$a^x$	$a^x \ln a$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Окончание приложения 1

Функция	Производная	Функция	Производная
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arccosec} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{Arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{Arcth} x$	$-\frac{1}{1-x^2}$

**Таблица основных интегралов**

*Степенные функции*

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1; x \neq 0; \text{если } n < 0)$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1 - \text{действительное, } x < 0)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| \quad (x \neq 0)$$

*Показательные функции*

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a \neq 1)$$

*Тригонометрические функции*

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| \quad \left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| \quad (x \neq k\pi)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \quad \left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \quad (x \neq k\pi)$$

*Гиперболические функции*

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x$$

$$\int \operatorname{th} x dx = \ln \operatorname{ch} x$$

$$\int \operatorname{cth} x \, dx = \ln |\operatorname{sh} x| \quad (x \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$$

*Дробно-рациональные функции* ( $a \neq 0$ )

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} & (|x| < a), \\ \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| & (a \neq 0) \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} & (|x| > a), \\ \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| & (a \neq 0) \end{cases}$$

*Иррациональные функции* ( $a \neq 0$ )

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} \quad (|x| < a)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \begin{cases} \operatorname{Arsh} \left( \frac{x}{a} \right), \\ \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \begin{cases} \operatorname{Arch} \left( \frac{x}{a} \right), \\ \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| \quad (|x| > a) \end{cases}$$

### Приложение 3

#### Функции комплексного переменного

Функция $f(z)$	$\operatorname{Re}(f(x))=u(x,y)$	$\operatorname{Im}(f(z))=v(x,y)$	Модуль $ f(z) $	Главное значение аргумента $\arg(f(z))$
$z$	$x$	$y$	$\sqrt{x^2+y^2}$	$\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$
$x^2$	$x^2-y^2$	$2xy$	$x^2+y^2$	$\operatorname{arctg} \frac{2xy}{x^2-y^2}$
$\frac{1}{z-a}$ ( $a=\alpha+i\beta$ )	$\frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$	$\frac{-(y-\beta)}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}$	$\operatorname{arctg} \frac{y-\beta}{\alpha-x}$
$\frac{1}{z^2}$	$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$	$\frac{-xy}{(x^2+y^2)^2}$	$\frac{1}{x^2+y^2}$	$\operatorname{arctg} \frac{2xy}{y^2-x^2}$
$\sqrt{z}$	$\pm \left( \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$	$\pm \left( \frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[4]{x^2+y^2}$	$\operatorname{arctg}(\sqrt{\rho^2+1}-\rho),$ $\rho = \frac{x}{ y }$
$\ln z$	$\frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$	$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2k\pi$	$\sqrt{u^2+v^2}$	$\operatorname{arctg} \frac{v}{u}$
$e^x$	$e^x \cos y$	$e^x \sin y$	$e^x$	$y+2n\pi, n$ – целое такое, что $-\pi < y+2n\pi \leq \pi$
$\sin z$	$\sin x \operatorname{ch} y$	$\cos x \operatorname{sh} y$	$\sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$	$\operatorname{arctg}[\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{th} y]$
$\cos z$	$\cos x \operatorname{ch} y$	$-\sin x \operatorname{sh} y$	$\sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$	$\operatorname{arctg}[-\operatorname{tg} y \cdot \operatorname{th} y]$
$\operatorname{sh} z$	$\operatorname{sh} x \cos y$	$\operatorname{ch} x \sin y$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y}$	$\operatorname{arctg}[\operatorname{tg} y \cdot \operatorname{cth} x]$
$\operatorname{ch} z$	$\operatorname{ch} x \cos y$	$\operatorname{sh} x \sin y$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y}$	$\operatorname{arctg}[\operatorname{tg} y \cdot \operatorname{th} x]$

$\operatorname{tg} z$	$\frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$	$\frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$	$\frac{(-\cos^2 2x + \operatorname{ch}^2 2y)^{\frac{1}{2}}}{ \cos 2x + \operatorname{ch} 2y }$	$\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} 2y}{\sin 2y}$
-----------------------	--	---	--	---

**Приложение 4**

**Изображения по Лапласу функций времени**

Изображение $L[f(t)]$	Оригинал $f(t)$
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{1}{p+a}$	$e^{-at}$
$\frac{1}{p^2}$	1
$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{a-b}(ae^{-at}-be^{-bt})$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$te^{-at}$
$\frac{p}{(p+a)^2}$	$e^{-at}(1-at)$
$\frac{1}{p^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\text{sh}(at)$
$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\text{ch}(at)$
$\frac{1}{p^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\sin(at)$
$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{1}{(p+b)^2+a^2}$	$\frac{1}{a}e^{-bt}\sin(at)$
$\frac{p}{(p+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\left(\cos(at)-\frac{b}{a}\sin(at)\right)$
$\frac{1}{p^3}$	$\frac{1}{2}t^2$

Продолжение приложения 4

Изображение $L[f(t)]$	Оригинал $f(t)$
$\frac{1}{p^2(p+a)}$	$\frac{1}{a^2}e^{-at} + at - 1$
$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{ab(a-b)}[(a-b) + be^{-at} - ae^{-bt}]$
$\frac{1}{p(p+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}[(c-b)e^{-at} + (a-c)e^{-bt} + (b-a)e^{-ct}]$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}[a(b-c)e^{-at} + b(c-a)e^{-bt} + c(a-b)e^{-ct}]$
$\frac{p^2}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}[a^2(c-b)e^{-at} + b^2(a-c)e^{-bt} + c^2(b-a)e^{-ct}]$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)^2}$	$\frac{1}{(b-a)^2}(e^{-at} - e^{-bt} - (b-a)te^{-bt})$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)^2}$	$\frac{1}{(b-a)^2}\{-ae^{-at} + [a+bt(b-a)e^{-bt}]\}$
$\frac{p^2}{(p+a)(p+b)^2}$	$\frac{1}{(b-a)^2}[a^2e^{-at} + b(b-2a-b^2t+abt)e^{-bt}]$
$\frac{1}{(p+a)^3}$	$\frac{t^2}{2}e^{-at}$
$\frac{p}{(p+a)^3}$	$e^{-at}t\left(1 - \frac{a}{2}t\right)$
$\frac{p^2}{(p+a)^3}$	$e^{-at}\left(1 - 2at + \frac{a^2}{2}t^2\right)$
$\frac{1}{p[(p+b)^2 + a^2]}$	$\frac{1}{a^2 + b^2}\left[1 - e^{-bt}\left(\cos(at) + \frac{b}{a}\sin(at)\right)\right]$
$\frac{1}{p(p^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^2}(1 - \cos(at))$

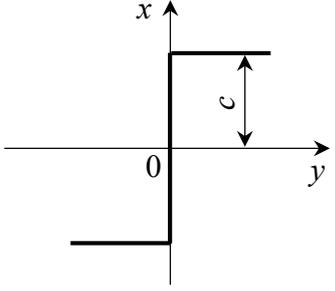
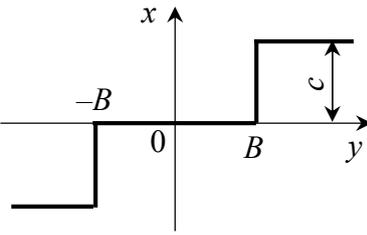
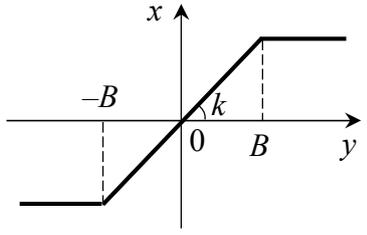
$\frac{1}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{a^2+b^2} \left[ e^{-bt} + \frac{a}{b} \sin(bt) - \cos(bt) \right]$
$\frac{p}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{a^2+b^2} \left[ -ae^{-at} + a \cos(bt) + b \sin(bt) \right]$
$\frac{p^2}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{a^2+b^2} (a^2 e^{-at} - ab \sin(bt) + b^2 \cos(bt))$
$\frac{1}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\frac{1}{(b-a)^2+c^2} \left[ e^{-at} - e^{-bt} \cos(ct) + \frac{a-b}{c} e^{-bt} \sin(ct) \right]$
$\frac{p}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\frac{1}{(b-a)^2+c^2} \left[ -ae^{-at} + ae^{-bt} \cos(ct) - \frac{ab-b^2-c^2}{c} e^{-bt} \sin(ct) \right]$
$\frac{p^2}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\frac{1}{(b-a)^2+c^2} \left[ a^2 e^{-at} + ((a-b)^2+c^2-a^2) e^{-bt} \cos(ct) - \left( ac+b \left( c - \frac{(a-bb)}{c} \right) \right) e^{-bt} \sin(ct) \right]$
$\frac{1}{p^4}$	$\frac{1}{6} t^3$
$\frac{1}{p^3(p+a)}$	$\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^2} t + \frac{1}{2a} t^2 - \frac{1}{a^3} e^{-at}$
$\frac{1}{p^2(p+a)(p+b)}$	$-\frac{a+b}{a^2 b^2} + \frac{1}{ab} t + \frac{1}{a^2(b-a)} e^{-at} + \frac{1}{b^2(a-b)} e^{-bt}$
$\frac{1}{p^2(p+a)^2}$	$\frac{1}{a^2} t(1+e^{-at}) + \frac{2}{a^3} (e^{-at} - 1)$
$\frac{1}{(p+a)^2(p+b)^2}$	$\frac{1}{(a-b)^2} \left[ e^{-at} \left( t + \frac{2}{a-b} \right) + e^{-bt} \left( t - \frac{2}{a-b} \right) \right]$
$\frac{1}{(p+a)^4}$	$\frac{1}{6} t^3 e^{-at}$
$\frac{p}{(p+a)^4}$	$\frac{1}{2} t^2 e^{-at} - \frac{a}{6} t^3 e^{-at}$
$\frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2-a^2} \left[ \frac{1}{a} \sin(at) - \frac{1}{b} \sin(bt) \right]$
$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2-a^2} [\cos(at) - \cos(bt)]$

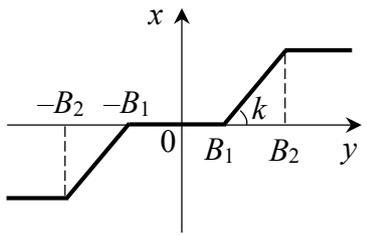
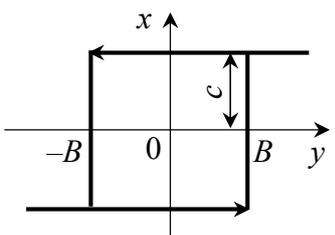
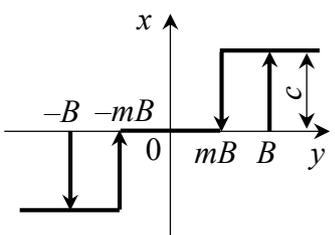
Окончание приложения 4

Изображение $L[f(t)]$	Оригинал $f(t)$
$\frac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2-a^2}[-a \sin(at)+b \sin(bt)]$
$\frac{p^3}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2-a^2}[-a^2 \cos(at)+b^2 \cos(bt)]$
$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^2} \left[ \frac{1}{a} \sin(at) - t \cos(at) \right]$
$\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} t \sin(at)$
$\frac{p^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} (\sin(at) + at \cos(at))$
$\frac{p^3}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2} (2 \cos(at) - at \sin(at))$
$\frac{1}{[(p+b)^2+a^2]^2}$	$\frac{e^{-bt}}{2a^2} \left[ \frac{1}{a} \sin(at) - t \cos(at) \right]$
$\frac{1}{p^2(p^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2} \left( t - \frac{1}{a} \sin(at) \right)$

## Приложение 5

### Коэффициенты гармонической линеаризации основных нелинейных характеристик

Статическая характеристика нелинейного участка	$q(A)$	$q_1(A)$
	$\frac{4c}{\pi A}$	$0$
	$\frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}}$	$0$
	$\frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{B}{A} + \frac{B}{A} \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}} \right)$	$0$

	$\frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{B_2}{A} - \arcsin \frac{B_1}{A} + \right. \\ \left. + \frac{B_2}{A} \sqrt{1 - \frac{B_2^2}{A^2}} - \frac{B_1}{A} \sqrt{1 - \frac{B_1^2}{A^2}} \right)$	$a$
	$\frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}}$	$-\frac{4cB}{\pi A^2}$
	$\frac{2c}{\pi A} \left( \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}} - \sqrt{1 - \frac{m^2 B^2}{A^2}} \right)$	$-\frac{2cB}{\pi A^2} (1 - m)$

Приложение 6

**Z-преобразования решетчатых функций**

Изображения $F(z)$	Оригинал $f[nT]$
$z^{-k}$	$\delta[(n-k)T]$
$\frac{z}{z-1}$	$1[nT]$
$\frac{z}{z-e^{aT}}$	$e^{anT}$
$\frac{zT}{(z-1)^2}$	$nT$
$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$	$(nT)^2$
$\frac{z \sin aT}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$	$\sin anT$
$\frac{z(z - \cos aT)}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$	$\cos anT$
$\frac{z \operatorname{sh} aT}{z^2 - 2z \operatorname{ch} aT + 1}$	$\operatorname{sh} anT$
$\frac{z(z - \operatorname{ch} aT)}{z^2 - 2z \operatorname{ch} aT + 1}$	$\operatorname{ch} anT$
$\frac{3T^3z(z+1)}{(z-1)^4} + \frac{T^3z(z+2)}{(z-1)^3}$	$(nT)^3$

Приложение 7

Перевод градусной меры в радианную

Угол	Дуга								
1°	0,017453	21°	0,366519	45°	0,785398	1	0,000291	1"	0,000039
2	0,034907	22	0,383972	50	0,872665	2	0,000582	2	0,000044
3	0,052360	23	0,401426	55	0,959931	3	0,000873	3	0,000048
4	0,069813	24	0,418879	60	1,047198	4	0,001164	4	0,000097
5	0,087266	25	0,436332	65	1,134464	5	0,001454	5	0,000145
6	0,104720	26	0,453786	70	1,221730	6	0,001745	6	0,000194
7	0,122173	27	0,471239	75	1,308997	7	0,002036	7	0,000242
8	0,139626	28	0,488692	80	1,396263	8	0,002327	8	0,000005
9	0,157080	29	0,506145	85	1,483530	9	0,002618	9	0,000010
10	0,174533	30	0,523599	90	1,570796	10	0,002909	10	0,000015
11	0,191986	31	0,541052	100	1,745329	20	0,005818	20	0,000019
12	0,209440	32	0,558505	120	2,094395	30	0,008727	30	0,000024
13	0,226893	33	0,575959	150	2,617994	40	0,011636	40	0,000029
14	0,244346	34	0,593412	180	3,141593	50	0,014544	50	0,000034
15	0,261799	35	0,610865	200	3,490659				
16	0,279253	36	0,628319	250	4,363323				
17	0,296706	37	0,645772	270	4,712389				
18	0,314159	38	0,663225	300	5,235988				
19	0,331613	39	0,680678	360	6,283185				
20	0,349066	40	0,698132	400	6,981317				



Научное издание

**И.Е. Александрова, Т.Е. Александрова**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ,  
СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ  
СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ**

*Монография*

Электронное издание сетевого распространения

Издательство «Научно-инновационный центр»  
660127, г. Красноярск, ул. 9 Мая, 5, 192  
Тел. (391) 271-23-89

Дата издания: 06.06.2016.

